

# **Une approche ambitieuse du critère Value at Risk**

## **Rapport de stage de fin détude**

**Abdelkader BOUSABAA**

Recherche & Innovations  
Finance Factory  
25, rue Tronchet, 75008 Paris

[a.bousabaa@gmail.com](mailto:a.bousabaa@gmail.com)

**Septembre 1999**



# REMERCIEMENTS

---

Je tiens tout particulièrement à remercier mon maître de stage, Jean Paul Nicolaï, de m'avoir proposé ce stage et d'avoir, tout au long de ce dernier, fait preuve d'une grande patience et d'une infinie pédagogie.

Je tiens aussi à remercier mes trois principaux collaborateurs sur ce projet, à savoir Bruneau Catherine, Elarchi Mounir et Delecourt Jean-Charles, pour le professionnalisme dont ils ont fait preuve.

Enfin, je voudrais remercier Ekambi Olivier, Elarchi Mounir et toutes les personnes que j'ai côtoyé au cours de ce stage pour leur disponibilité et pour la qualité de leurs réponses à mes nombreuses interrogations.



# INTRODUCTION

---

La volatilité accrue sur les marchés financiers et le développement d'instruments de couverture toujours plus complexes ont permis au « Risk Management » de devenir une science à part entière. Dans sa définition la plus large, le Risk Management englobe la gestion de toutes les catégories de risque, que ce dernier soit quantifiable (de marché, de crédit, ...) ou non (risque juridique, risque médiatique, ...). Dans les faits, les Risk Managers étudient tous les facteurs susceptibles de menacer le rendement espéré d'un investissement et tentent d'apporter des solutions stratégiques. Ils possèdent pour cela un grand nombre d'outils parmi lesquels on peut citer la Value of 1 Basis Point (VBP) (qui quantifie la sensibilité d'un portefeuille à un mouvement de la courbe des taux d'intérêt d'une amplitude de un centième de pour-cent), le Stress Testing (qui permet des simulations de scénarii catastrophes), la Value at Risk ou encore les méthodes de reporting telles que la CAD (Capital Adequacy).

Parmi les nombreux outils de gestion des risques financiers qui ont vu le jour ces dix dernières années, la Value at Risk (VaR) a plus particulièrement attiré l'attention des sociétés de gestion. La VaR d'un portefeuille au risque de  $\alpha$  % pour un horizon donné peut être définie ainsi : Si on exclut les  $\alpha$  % des occurrences les plus catastrophiques pour la valorisation du portefeuille, la VaR correspond à la perte maximale (exprimée en %) que le portefeuille peut subir.

Les avantages de cet outil sont alors clairs. Il permet, outre une gestion optimisée des risques financiers, une grande transparence sur les risques financiers que prennent les clients.

La plupart des outils présents sur le marché estiment la VaR grâce à la technique dite de la « matrice des variances-covariances estimée » qui suppose une distribution normale des rendements du portefeuille. Or, l'analyse des queues de distribution montrent qu'elles sont

beaucoup trop épaisses pour coïncider avec celles d'une loi normale. De ce fait, deux autres techniques d'estimation de la VaR se sont développées, « l'analyse historique » et « la simulation de Monté Carlo », et ont permis de palier à ce problème. Mais, parmi ces méthodes, seule la deuxième, à savoir la technique de simulation de Monté Carlo, peut être adaptée au calcul d'une VaR à des horizons très grand (3 mois, 1an, etc.) comme le nécessite les OPCVM Ecureuil Gestion.

Cependant, la mise en œuvre d'un outil de gestion du risque basé sur une méthodologie VaR Monté Carlo et son adaptation aux besoins spécifiques des gérants d'Ecureuil Gestion nécessite de nombreux développements spécifiques. Le choix des facteurs de risque et des processus suivis par ces derniers constitue l'un d'entre eux et nous avons souhaité y donner une dimension particulière. Contrairement aux méthodes classiques d'estimation du critère VaR, nous avons choisi de modéliser les facteurs de risque retenus en utilisant une méthodologie proche de celle de Engle & Granger [1987] et dans la lignée des travaux de Gregory & Hansen [1996].

Nous présentons donc, dans une première partie, une étude complète des facteurs de risques comprenant d'une part, une modélisation des facteurs de risques, et d'autre part, les techniques permettant de faire évoluer le modèle obtenu.

La deuxième partie traitera plus en détail de la notion de VaR et de ses implications en terme de quantification des risques de marché et de reporting comptable. Nous analysons tout d'abord les deux techniques les plus classiques d'estimation de la VaR, à savoir la matrice des variances-covariances estimée et l'analyse historique, et présentons ensuite la technique dite de simulation de Monté Carlo.

Nous concluons enfin sur les améliorations que l'on peut apporter à notre modèle et sur l'avenir probable que connaîtra cet outil performant de gestion du risque qu'est la Value at Risk.

# Chapitre 1

## ECUREUIL GESTION : UNE EXPÉRIENCE RECONNUE

---

Filiale commune<sup>1</sup> de la Caisse Nationale des Caisses d'Epargne et de la Caisse des Dépôts et Consignations, Ecureuil Gestion est une des toutes premières sociétés créées il y a un peu plus de dix ans pour mettre en œuvre le principe de la séparation des gestions. Elle présente aujourd'hui une antériorité et une expérience reconnue et, si elle bénéficie de l'appui de la Caisse des dépôts en matière d'expertise et d'analyse économique et financière, Ecureuil Gestion n'en reste pas moins une société structurée pour un fonctionnement autonome, au seul service des Caisses d'Epargne et de leurs clients.

Sa mission est double : elle doit, d'une part concevoir et gérer les OPCVM commercialisés par les Caisses d'Epargne, et d'autre part animer leur vente dans le cadre du plan de développement commercial des Caisses d'Epargne.

### 1 Des métiers complémentaires

Regroupant près de quarante collaborateurs, Ecureuil Gestion est une société de gestion qui couvre un très large ensemble de métiers complémentaires :

La gestion financière : ce terme regroupe toute la gestion des portefeuilles des OPCVM Ecureuil, sur l'ensemble des marchés, dans le strict respect des orientations fixées par les conseils d'administration des Sicav, et des règles dictées par la COB. Le rôle de la Caisse des dépôts est d'apporter son expertise d'opérateur et de dépositaire.

---

<sup>1</sup>Il n'est pas certain qu'avec la réforme actuelle des Caisses d'Epargne, cette situation reste telle que je l'ai connue.

- L'ingénierie financière et développement : ce département s'occupe de concevoir de nouveaux produits et d'aménager la gamme des OPCVM proposés à la clientèle, selon les évolutions des marchés, de la réglementation, des besoins et comportements de la clientèle.
- La gestion de la vie sociale, administrative et comptable des OPCVM : ce bureau est en charge du montage juridique des nouveaux produits, de l'organisation des conseils d'administration des Sicav et des assemblées générales d'actionnaires, des relations avec les autorités de marché et enfin de la tenue de la comptabilité de chaque OPCVM.
- La formation et l'information du réseau de vente : la mise en place d'un dispositif d'information périodique et de programmes de formation, permet à Ecureuil Gestion d'entretenir des relations étroites et régulières avec les Caisses d'Epargne.
- La communication clientèle : Son but est d'informer les souscripteurs et de promouvoir les OPCVM. Elle privilégie une information large, régulière et argumentée, complétée par des opérations publicitaires ponctuelles (principalement dans la presse).

## 2 Une équipe jeune et dynamique

Peu de temps avant mon arrivée à Ecureuil Gestion, il avait été décidé un réaménagement complet de l'espace de travail. La principale mesure consista à réunir dans une salle de marché le front office (les gérants actions, taux et monétaires), le middle office (constitué principalement d'assistant de gestion) et les stratégestes (qualitatifs et quantitatifs) chargés de cerner et de modéliser les différents risques auxquels sont exposées les OPCVM Ecureuil. Ce regroupement a eu évidemment pour effet de dégager des synergies importantes entre les différents services et de favoriser la communication entre les différents niveaux de la gestion.

### 2.1 Les gérants : un des poumons de la société

A la fois gestionnaires, économistes et stratèges, les gérants d'Ecureuil Gestion se situent au cœur même du fonctionnement opérationnel de la société. Aidés dans leur tâche par des assistants de gestion très réactifs et très efficaces, ils gèrent les différentes OPCVM des Caisses d'Epargne en respectant autant que faire se peut la politique et les lignes directrices qui ont été définies. Leurs formations d'origine sont très diverses et on trouve aussi bien des anciens traders que des Sales en produits structurés ou encore des anciens assistants de gestion. Mais, loin d'être un handicap, cette diversité représente à la fois une richesse et une force. Elle permet de confronter les expériences respectives et ainsi d'améliorer les analyses nécessaires des marchés.

### 2.2 Des assistants très réactifs

L'assistant de gestion est une pièce maîtresse dans le grand échiquier de la gestion. Il doit d'une part, être attentif aux besoins et aux interrogations des gérants en matière de sensibilité et de risque, et d'autre part, réfléchir aux outils qui seraient susceptibles d'améliorer d'une manière ou d'une autre la gestion effective des portefeuilles. Mais, sa mission ne s'arrête pas là car il doit quotidiennement enregistrer, et ce dans des laps de temps très courts, toutes les opérations effectuées par les gérants et les transmettre au Back Office pour que les comptables les enregistrent à leur tour. La journée type d'un assistant de gestion n'est donc pas de tout



repos et se caractérise à la fois par de très fortes contraintes temporelles et par une très grande liberté d'action.

### *2.3 De relativement bonnes conditions de stage*

Intégré au département « Risk Management », ma mission principale était de réfléchir au développement d'un outil d'aide à la décision et d'un outil de gestion du risque basé sur une méthodologie Value at Risk. Les moyens techniques mis à ma disposition étaient bien adaptés et j'ai pu disposer de tous les outils informatiques nécessaires (RATS pour la modélisation, GAUSS et Excel pour les simulations, Visual Basic et une formation en VBA pour le développement d'outils professionnels) et d'une expertise économique et financière efficace.

Sur le plan humain, il règne au sein de cette société une atmosphère de travail très conviviale et s'il existe un point commun entre les différentes personnes qui compose le département, c'est sans aucun doute la disponibilité. Il arrive bien évidemment que l'atmosphère se tende quelque peu certains jours d'annonce, mais cela ne change en rien les relations existantes.



## Chapitre 2

# MODÉLISATION DES FACTEURS DE RISQUE

---

Avant d'étudier<sup>1</sup> les différents problèmes inhérents à l'évaluation de la Value at Risk, il convient de modéliser les facteurs de risque sur lesquels vont être projetés certaines lignes des portefeuilles. Cette modélisation joue un rôle très important dans l'approche Monté Carlo de la VaR car elle assure une cohérence lors de la diffusion des facteurs de risque.

### 1 Problématique

Il s'agit de proposer un modèle économétrique permettant de rendre compte de la dynamique d'un ensemble de variables macro financières sensibles dans la gestion d'un portefeuille. Ces variables représentent les principaux facteurs de risque, corrélés et évolutifs, auxquels sont confrontés les gérants dans leur travail quotidien. Ce modèle constitue le cœur d'un outil d'aide à la décision, utile pour une analyse rétrospective, pour une évaluation de la conjoncture courante, ou dans un but prospectif, pour définir des stratégies de gestion à l'horizon d'un an, ou plus, sous réserve de l'élaboration de scénarii macroéconomiques.

Dans l'analyse qui est menée, nous considérons que les variables telles que les rendements d'obligations de différentes maturités pour différents pays, les indices boursiers de différentes places ainsi que les taux de change entre les principales devises présentent des évolutions dynamiques qui partagent des tendances dites de long terme par opposition aux fluctuations transitoires qui peuvent être observées. L'identification de telles tendances s'avère extrêmement

---

<sup>1</sup>Cette partie a été réalisée avec la collaboration de Catherine Bruneau : professeur à l'Université de Paris X Nanterre et à l'Université de Cergy-Pontoise.

utile pour décrire les facteurs de risques dont il a été question, d'une part parce qu'elles apparaissent en nombre plus réduit que les variables initiales, d'autre part parce qu'elles permettent de décrire efficacement les risques persistants, dont l'appréhension est déterminante dans l'élaboration d'une stratégie de gestion de moyen ou de long terme.

### 1.1 Notions de tendance et de choc

A chaque instant, la dynamique d'une variable  $X$  évolue sous l'effet d'un choc qui correspond à une « surprise », estimée, de ce fait comme plus petite partie imprévisible c'est-à-dire l'innovation de la variable à la date concernée (notée  $\varepsilon_t$ <sup>2</sup>). La prévision est alors fondée sur une représentation auto-régressive univariée de la dynamique.

$$X_t = \sum_h a_h X_{t-h} + \varepsilon_t$$

Lorsque sa dynamique est non-stationnaire<sup>3</sup>, cette variable présente une tendance stochastique  $T_t$  : cette tendance est représentée par une marche aléatoire, identifiée comme la résultante des chocs successifs.

$$T_t = \sum_{s \leq t} \varepsilon_s$$

On notera qu'en présence d'une tendance, les chocs  $\varepsilon_t$  ( $s \leq t$ ) ont un effet permanent sur  $X_t$  : leur coefficient de pondération est constamment égal à 1.

Leur partie cyclique est la composante complémentaire qui, avec la tendance, permet de reconstituer la série observée :

$$X_t = T_t + C_t$$

Contrairement à la tendance  $T_t$ , la composante cyclique  $C_t$  est stationnaire et sa dynamique est bien représentée par un modèle ARMA, pour lequel le bruit blanc est le processus des innovations  $\varepsilon_t$  :

$$C_t = \sum_h g_h C_{t-h} + \sum_i f_i \varepsilon_{t-i}$$

On notera que dans la décomposition précédente, il n'y a qu'un type de choc à l'origine de la tendance et de la partie cyclique. Il est important de souligner le caractère arbitraire de ce choix. D'autres auteurs choisissent d'opposer les chocs contribuant à la partie cyclique, dits transitoires, et les chocs contribuant à la tendance, dits persistants, en les supposant orthogonaux, c'est-à-dire non-corrélés à chaque instant. Toutes les hypothèses intermédiaires concernant les corrélations instantanées entre les deux types de choc sont possibles : de fait,

<sup>2</sup>Le processus est un bruit blanc : à chaque date  $t$ ,  $\varepsilon_t$  est une variable centrée de variance (constante)  $\sigma_\varepsilon$  et il n'existe pas d'auto-corrélation inter-temporelle :  $\text{corr}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$  si  $t \neq t'$ .

<sup>3</sup>Ici, une série  $X_t$  est non-stationnaire, au sens où sa différence première  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ , c'est-à-dire son taux de variation est stationnaire. Ce taux doit avoir une moyenne et une variance constantes au cours du temps. De plus la corrélation entre  $\Delta X_t$  et  $\Delta X_{t-h}$  ne doit dépendre que de l'écart temporel  $h$  et non de la date absolue  $t$ .

on ne peut pas identifier statistiquement les deux composantes cyclique et tendancielle (Quah [1989]).

Le problème d'identifiabilité précédent est résolu en adoptant une caractérisation multivariée de la dynamique. On décrit la dynamique jointe de toutes les variables d'intérêt et on recherche les tendances communes du système, caractérisées comme des marches aléatoires. Les bruits blancs associés sont les processus d'innovations des différentes séries, extraites d'une représentation auto-régressive multivariée<sup>4</sup>.

$$X_t = \sum_h b_h X_{t-h} + \sum_i c_i Y_{t-i} + \varepsilon_{X_t}$$

$$Y_t = \sum_h d_h X_{t-h} + \sum_i e_i Y_{t-i} + \varepsilon_{Y_t}$$

Par exemple, à chaque instant, un indice boursier  $X$  est caractérisé non seulement par ses valeurs passées  $X_{t-h}$  ( $h \geq 1$ ), mais aussi par celles de l'activité ou celles des taux d'intérêt (variables  $Y$ ) avec des délais de réaction plus ou moins longs.

Lorsque des séries partagent la même tendance, elles évoluent selon « un sentier » de croissance correspondant à l'attraction exercée par une cible de long-terme. Sur le plan empirique, l'existence de telles cibles se traduit par l'importante propriété de cointégration.

## 1.2 Cointégration, cible de long terme et mécanisme à correction d'erreur

Lorsque des séries non-stationnaires partagent des tendances communes, il existe des combinaisons (linéaires) de ces séries qui s'écartent peu de zéro : on dit qu'elles s'écartent peu d'un sentier de croissance commun. Les combinaisons définissent des variables d'écart  $Z$  stationnaires (centrées, de variance constante au cours du temps et de corrélations intertemporelles indépendantes de la date absolue cf. note 3).

Chaque combinaison représente une cible de long-terme qui serait exactement vérifiée si l'écart était strictement nul. En pratique, cet écart est centré et il est transitoire parce qu'il est stationnaire. De plus, il intervient dans la dynamique du système selon un mécanisme dit à correction d'erreur : si, à une date donnée, les séries s'écartent « trop » de la cible, c'est-à-dire si l'écart est « trop » grand, les variations de la période suivante tendent à corriger l'excès observé. En effet la variable d'écart de la date courante influence négativement la variation de la période suivante.

Ainsi on écrira qu'un indice boursier peut être combiné (linéairement) avec un taux d'intérêt,  $R$ , et une variable de croissance LVPIB (Logarithme du PIB en valeur du pays concerné) selon la spécification :

$$\text{Log}(S\&P)_t - (c + a\text{LogLVPIB}_t - bR_t) = Z_t \approx 0 \quad (2.1)$$

$Z_t$  est une variable stationnaire centrée et le mécanisme à correction d'erreur est décrit par :

<sup>4</sup>On notera que l'innovation-choc définie dans le cadre multivarié,  $\varepsilon_{X_t}$  est différente de l'innovation-choc définie dans le cadre univarié,  $\varepsilon_t$ .

$$\begin{aligned}
\Delta \text{Log}(S\&P)_t &= \sum_h d_h \Delta \text{Log}(S\&P)_{t-h} - \gamma Z_{t-1} + u_t \\
&= \sum_h d_h \Delta \text{Log}(S\&P)_{t-h} - \gamma (c + a \text{Log} LVPIB_{t-1} - b R_{t-1}) + u_t
\end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $\gamma$  est un coefficient positif et  $u$  désigne un résidu, bruit blanc.

D'un point de vue pratique, on cherche à estimer des relation-cibles ou relations de coïntégration, en choisissant des combinaisons linéaires de séries qui soient stationnaires et participent de manière significative à un mécanisme à correction d'erreur. On procède alors à l'estimation en deux étapes des paramètres des relations de type (1) et (2), selon la méthodologie de Engle et Granger [1987], améliorée dans un deuxième temps de façon à assurer la stabilité des estimations.

On désignera par la suite les variables telles que  $LVPIB$  ou  $R$  comme des fondamentaux de l'indice S&P : les valeurs passées de ces variables expliquent le niveau courant de l'indice et permettent donc d'être utilisées pour la prévision de celui-ci, ce qui correspond à une propriété économétrique de causalité. De plus, cette causalité est une causalité persistante au sens où elle permet d'affirmer le pouvoir prédictif des fondamentaux pour des horizons de prévision à long-terme : ce sont en effet les variables en niveau qui sont utilisées pour la prévision et pas seulement leur taux de variation.

Le dernier point important concerne l'existence de ruptures structurelles dans la spécification des cibles de long-terme.

### 1.3 Ruptures structurelles dans les cibles de long-terme

On admet que des événements rares puissent induire des modifications persistantes de ces cibles. La notion d'évènement rare est une traduction synthétique de phénomènes complexes qui peuvent être liés à des interventions de différentes autorités, monétaires, gouvernementales, etc. ou à la perception par les agents de modifications profondes de l'économie tel que l'inflexion durable de la productivité ou d'une politique monétaire, ou encore de changements institutionnels.

Ces modifications structurelles de la cible se traduisent par des variations des poids des différents fondamentaux de la variable d'intérêt dans la spécification d'une cible. Par exemple, pour l'indice boursier, il s'agit de modifications des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  intervenant dans l'équation (1) précédente. Dans les analyses empiriques présentées par la suite, on autorise un petit nombre de tels changements structurels, typiquement entre une et quatre ruptures sur une période de dix ans. L'introduction de ces ruptures permet de définir une variable d'écart  $Z$  stationnaire, dans le cas où des combinaisons linéaires simples des séries ne permettraient pas une telle définition. L'idée est simple : si on autorise la cible à se déformer, l'écart à celle-ci peut rester plus « petit ». Sur le plan empirique, on doit tester l'existence de relations de coïntégration avec ruptures structurelles (c'est-à-dire avec coefficients variables) dans la lignée des travaux de Gregory et Hansen [1996].

## 2 Méthodologie statistique

La procédure de validation des équations décrivant la dynamique des variables financières associées aux principaux facteurs de risque peut être décrite de la manière suivante.

### 2.1 Estimation de la relation de long terme

On adopte une procédure d'estimation dite en single-equation, c'est-à-dire que l'on traite chaque équation séparément. La variable à expliquer est une variable financière, indice boursier, rendement d'obligation ou taux de change, pour laquelle on vérifie la non-stationnarité. Plus précisément, on établit que la série en niveau est intégrée d'ordre un : elle présente une tendance représentée par une marche aléatoire. Par contre, la série différenciée est stationnaire.

Pour établir cette propriété, on met en œuvre des tests de Dickey-Füller, avec éventuellement une partie déterministe, c'est-à-dire une constante et/ou une dérive déterministe<sup>5</sup>.

On recherche les fondamentaux, définis comme des régresseurs macro-économiques ou financiers tels que le résidu de la régression mise en œuvre pour expliquer la variable financière, prise en niveau, soit stationnaire. Ce résidu définit la variable d'écart à la cible  $Z$ .

L'étude de la stationnarité des variables d'écart  $Z$  correspond à des tests de cointégration standard mis en œuvre selon la procédure en deux étapes proposée par Engle et Granger [1987]. On utilise alors les tables de Mc Kinnon [1996] ou des tables ad-hoc, lorsqu'on introduit des ruptures structurelles dans les relations cibles correspondantes, comme décrit ci-après.

Etant donné une cible, lorsque le résidu  $Z$  obtenu par régression reste non-stationnaire, quels que soit les fondamentaux choisis, on introduit des ruptures et plus précisément on autorise une modification de la constante à 3 ou 4 dates, sélectionnées de façon à assurer au mieux la stationnarité recherchée et, conjointement, la plus grande significativité de la force de rappel, -coefficient  $\gamma$  correspondant- dans le modèle à correction d'erreur estimé lors de la deuxième étape (cf. équation de type (2)).

La stationnarité peut être testée rigoureusement en définissant des tables ad-hoc, pour chaque équation associée à une cible et chaque choix des dates de ruptures.

Plus rapidement et moins rigoureusement, on peut aussi trouver une indication fiable de la propriété de stationnarité en considérant la sortie automatique de la régression, relative à la statistique de Durbin-Watson.

En effet, cette statistique est définie comme :

$$DW = 2(1 - r)$$

où  $r$  désigne l'estimation du coefficient de corrélation du premier ordre de la série des résidus  $Z$ . Si cette statistique a une valeur suffisamment élevée, de l'ordre de 0.70, on peut déduire que  $r$  est de l'ordre de 0.65, ce qui est significativement différent de 1, valeur caractéristique de la non-stationnarité et plus précisément de la présence d'une marche aléatoire sous-jacente.

---

<sup>5</sup>On met en œuvre la régression  $\Delta X_t = c + dt + \phi X_{t-1} + \sum_h \alpha_h \Delta X_{t-h} + \varepsilon_t$  et on teste la nullité du coefficient  $\phi$ , par utilisation de tables appropriées (différentes selon que  $c$  et/ou  $d$  sont ou non significatifs, après s'être assuré que le résidu de la régression  $\varepsilon_t$  est blanc).

Par exemple, dans le cas de l'indice boursier Standard and Poors, étudié en données mensuelles sur la période 01 :88-09 :98, on trouve comme équation-cible et donc comme relation de cointégration, une relation faisant intervenir comme fondamentaux le rendement des obligations américaines à trente ans et le logarithme du PIB pris en valeur (retardé de 4 mois, pour tenir compte du délai d'acquisition de l'information correspondante). De plus, le résidu est rendu stationnaire par l'introduction de quatre variables indicatrices (valant 0 avant la date qui leur est associée et 1 ensuite) aux dates 08 :90, 02 :93, 02 :96 et 12 :96.

$$\begin{aligned} LUSP500 = & -10.3 + 1.9 \times LUSVP4 - 0.09 \times RYUS30 - 0.08 \times DUM0890 \\ & -0.13 \times DUM0293 + 0.10 \times DUM0296 + 0.15 \times DUM1296 + Z_{LUSP500} \end{aligned}$$

Quand on construit la table ad-hoc<sup>6</sup> pour tester la stationnarité du résidu de la régression précédente, on trouve comme seuil critique à 5%, la valeur  $-4.08$  pour la statistique de Phillips et Perron  $Z_\tau$ . La valeur de la même statistique calculée à partir des séries observées est égale à  $-5.63$ . On conclut donc à la stationnarité de  $Z_{LUSP500}$ .

Ce résultat est confirmé lorsqu'on examine la valeur de la statistique de Durbin-Watson, soit,  $0.74$ , ce qui indique un coefficient d'auto-corrélation  $r \approx 0.74$  pour  $Z_{LUSP500}$ , donc un coefficient d'auto-corrélation suffisamment différent de 1.

## 2.2 Estimation de la relation de court terme

L'équation de court terme d'une variable financière est estimée lors d'une deuxième étape après l'estimation de l'équation de long-terme caractéristique de la cible.

Elle est obtenue en régressant linéairement la différence première (taux de variation) de la variable financière d'intérêt sur des régresseurs stationnaires correspondant à des variations retardées d'autres variables, la variable d'écart à la cible également retardée et un certain nombre de régresseurs contemporains. Ces derniers sont introduits selon un schéma récursif pour orthogonaliser les résidus du système d'équations décrivant les dynamiques jointes des variables financière retenues.

Pour faire comprendre l'idée correspondante de manière simple, on peut se limiter à un système de deux variables, dans lequel la première équation ne comporte que des régresseurs retardés, c'est-à-dire les différences premières retardées des deux variables, et la seconde fait intervenir, outre les régresseurs retardés précédents, la valeur contemporaine de la première variable. On peut en effet montrer que l'auto-corrélation entre les innovations des deux variables obtenues à partir d'une représentation auto-régressive bivariée est estimée comme le coefficient du régresseur contemporain de la deuxième équation<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>On effectue la simulation de 10.000 trajectoires de trois marches aléatoires  $Y_{1t} = \sum_{s \leq t} \varepsilon_{1s}$ ,  $Y_{2t} = \sum_{s \leq t} \varepsilon_{2s}$ ,  $Y_{3t} = \sum_{s \leq t} \varepsilon_{3s}$  à partir de trois bruits blanc indépendants et pour chacune des trajectoires simulées de  $T$  points on effectue la régression :

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_2 Y_{2t-1} + \beta_2 Y_{2t-1} + \alpha_3 Y_{3t-1} + \beta_3 Y_{3t-1} + Z_t$$

On effectue le calcul de la statistique de Phillips-Perron pour le résidu  $u$  de la régression :

$$\Delta Z_t = \phi Z_{t-1} + u_t$$

On obtient ainsi 10.000 valeurs de la statistique de test, et donc la distribution empirique associée (sous l'hypothèse nulle de non-cointégration des trois marches aléatoires simulées).

On en déduit le fractile correspondant au risque retenu. Ce fractile correspond au seuil critique recherché.

<sup>7</sup>On écrit :



Dans le cas où on étudie la dynamique jointe de plusieurs variables, ce type d'estimation exige de ranger les équations dans le sens d'une endogénéité croissante de la variable expliquée. Ainsi, dans le cas de Etats-Unis, on montrera que les variables sont, dans l'ordre d'endogénéité croissante, le taux à 2 ans, les spreads trois mois-deux ans, deux ans-dix ans, deux ans-cinq ans, deux ans-trente ans, 1 an-deux ans, puis l'indice Standard and Poors.

A titre d'exemple, pour l'équation de court terme de l'indice Standard and Poors, on trouve comme régresseurs, outre la variable d'écart retardée à la cible précédemment décrite, des régresseurs contemporains correspondant aux taux de variation du rendement des obligations à trente ans, et du spread entre le deux ans et le 1 an, ce qui signifie que les seules corrélations contemporaines significatives entre les variables de taux et l'indice boursier ne concernent que le taux à 30 ans et le spread 1 an - 2 ans. L'équation dite « à correction d'erreur » est donc la suivante :

$$\Delta LUSP500 = 0.01 - 0.07 \times \Delta RYUS30 + 0.06 \times \Delta SPUS12 - 0.28 \times Z_{LUSP500(1)} + u_{LUSP500}$$

La force de rappel est significative. On obtient 39.5% de variance expliquée, avec un résidu blanc selon la statistique de Durbin-Watson, égale à 1.81 et selon la statistique de Ljung-Box dont la p-value est égale à 40%<sup>8</sup>.

La dernière validation du modèle retenu est obtenue en effectuant des simulations dynamiques, d'abord « en échantillon », puis « hors échantillon ».

### 2.3 Simulations dynamiques

#### *Simulations « en échantillon »*

On estime et on simule la variable sur une même période de référence. La simulation est dynamique parce qu'à un horizon de projection de plusieurs mois, on remplace les variables explicatives non encore connues par leur prévision, selon l'équation qui décrit leur dynamique. La validation est satisfaisante lorsque la trajectoire simulée de la variable financière étudiée est proche, en tendance, de la trajectoire observée.

Par exemple, pour l'indice Standard and Poors, on obtient les séries observées et simulées suivantes (en mettant en œuvre les simulations dynamiques dès la première date de la période étudiée (Janvier 1988), sachant que l'estimation est effectuée avec l'ensemble des points disponibles observés (Janvier 1988-Octobre 1998)).

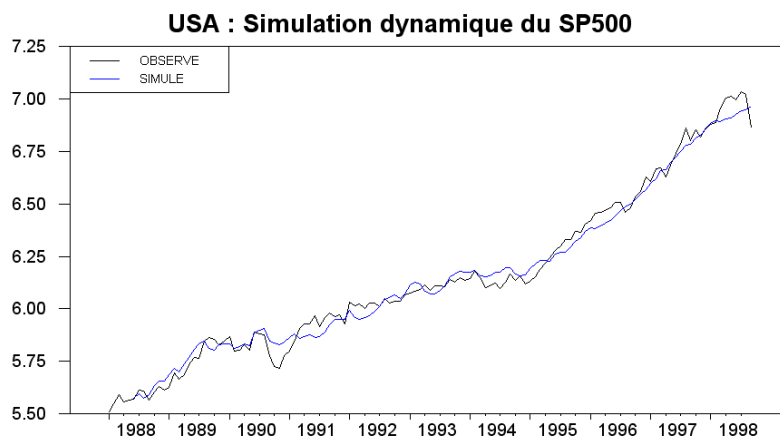
La prévision, à la date  $t$ , du rendement de l'indice SP500 à l'horizon  $H$  s'écrit :

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{h>0} a_h X_{t-h} + \sum_{h>0} b_h Y_{t-h} + \varepsilon_{X_t} \\ Y_t &= \alpha X_t + \sum_{h>0} c_h X_{t-h} + \sum_{h>0} d_h Y_{t-h} + \eta_{Y_t} \end{aligned}$$

et on vérifie que  $\text{corr}(\varepsilon_{X_t}, \eta_{Y_t}) = 0$ ,  $\alpha$  désignant la corrélation  $\text{corr}(X_t, Y_t | I_{t-1})$  entre  $X_t$  et  $Y_t$ , une fois fixées les valeurs de toutes les variables avant la date  $t$  (information  $I_{t-1}$ ).

<sup>8</sup>Lorsqu'on a suffisamment de points sur la trajectoire, la statistique de Durbin-Watson, proche de 2 indique l'absence de corrélation d'ordre 1 pour le résidu de la régression étudiée. La statistique de Ljung-Box doit avoir une p-value élevée (supérieure à 15%) pour que l'on puisse conclure à l'absence de corrélation –à tous les ordres de 1 à 32- pour le processus des résidus de la régression.

$$\hat{\Delta}LUSP500_t(H) = 0.01 - 0.07 \times \hat{\Delta}RYUS30_t(H) + 0.06 \times \hat{\Delta}SPUS12_t(H) - 0.28 \times \hat{Z}_{LUSP500t}(H) + u_{LUSP500}$$



Graphique 2.1. *Simulation dynamique du S&P 500 sur la période 01 :88-09 :98*

Lors des simulations, on calcule conjointement un indicateur de performance prédictive, plus précisément la statistique de Theil<sup>9</sup> qui permet de montrer que le modèle fournit de meilleures prévisions qu'un modèle de marche aléatoire, pour lequel la statistique vaut 1.

On trouve, pour l'indice Standard and Poors, les caractéristiques de performances prédictives suivantes :

<b>Coefficients de Theil sur la période 01 :88-09 :98</b>					
Forecast Statistics for Series DLUSP					
Step	Mean Error	Mean Abs Error	RMS Error	Theil U	N.Obs
1	0.00187282	0.023578853	0.03159978	0.5644142	133
2	0.00227686	0.02562261	0.03332814	0.6162375	132
3	0.00250633	0.026516297	0.03512727	0.6594145	131
4	0.0024517	0.026513089	0.03514072	0.6206495	130
5	0.00275637	0.026521059	0.03538857	0.6305153	129
6	0.002564	0.027162677	0.03590578	0.6439426	128
7	0.00232855	0.027412926	0.03618739	0.7239239	127
8	0.00229109	0.027258594	0.0360531	0.6818817	126
9	0.00231166	0.027152541	0.03610081	0.6944882	125
10	0.00193168	0.027056545	0.03593197	0.769118	124
11	0.00200895	0.027044185	0.0359539	0.6814577	123
12	0.00214207	0.027141852	0.03613158	0.6979288	122

<sup>9</sup>On définit la statistique de Theil, pour un horizon de prévision H, grâce à l'expression :

$$T(H) = \frac{\sum_{s \geq H+1} \left( Y_s - \hat{Y}_{s-H}(H) \right)^2}{\sum_{s \geq H+1} (Y_s - Y_{s-H})^2}$$

Elle vaut 1, lorsque le processus  $Y$  est une marche aléatoire car on a :  $\hat{Y}_{s-H}(H) = Y_{s-H}$ . En revanche, le modèle de prévision « bat » la marche aléatoire, lorsque la statistique de Theil est inférieure à 1.

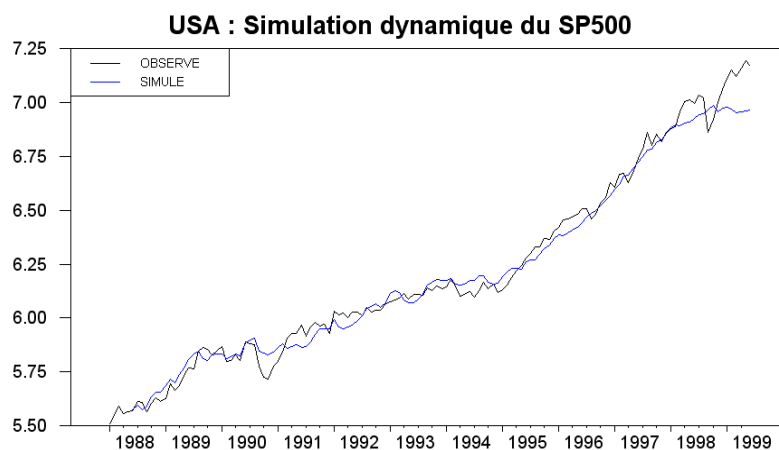
Forecast Statistics for Series LUSP					
Step	Mean Error	Mean Abs Error	RMS Error	Theil U	N.Obs
1	0.00187282	0.023578853	0.03159978	0.7973298	133
2	0.00400222	0.030679745	0.04085512	0.7264861	132
3	0.00600784	0.036855145	0.04790143	0.6782526	131
4	0.00753431	0.041098914	0.0527958	0.6247323	130
5	0.00941483	0.044101275	0.05682126	0.5884529	129
6	0.01090163	0.046274037	0.05900933	0.5499293	128
7	0.0119823	0.046506177	0.06018487	0.5144473	127
8	0.01290283	0.046913006	0.06115972	0.4770023	126
9	0.01379683	0.046625477	0.06173406	0.44443	125
10	0.01422033	0.047151657	0.06233421	0.4180928	124
11	0.01472055	0.047542389	0.06293037	0.3859812	123
12	0.01534234	0.047580979	0.06320691	0.3582338	122

Enfin, on procède à des simulations dynamiques dites « hors échantillon ».

#### *Simulations hors échantillon*

On a estimé le modèle sur la période 01 :88-09 :98, et on prévoit les valeurs des mois suivants jusqu'au mois courant.

Dans le cas de l'indice Standard and Poors, la comparaison entre les valeurs prévues et les valeurs réellement observées est résumée par le graphe suivant :



Graphique 2.2. *Simulation dynamique du S&P sur la période 01 :88-06 :99*

Et on trouve, toujours pour l'indice Standard and Poors, les caractéristiques de performances prédictives suivantes :

**Coefficients de Theil sur la période 01 :88-06 :99**

Forecast Statistics for Series DLUSP

Step	Mean Error	Mean Abs Error	RMS Error	Theil U	N.Obs
1	0.001872818	0.023578853	0.03159978	0.5644142	133
2	0.002276858	0.02562261	0.03332814	0.6162375	132
3	0.002506331	0.026516297	0.03512727	0.6594145	131
4	0.002451697	0.026513089	0.03514072	0.6206495	130
5	0.002756369	0.026521059	0.03538857	0.6305153	129
6	0.002564001	0.027162677	0.03590578	0.6439426	128
7	0.002328549	0.027412926	0.03618739	0.7239239	127
8	0.002291089	0.027258594	0.0360531	0.6818817	126
9	0.002311659	0.027152541	0.03610081	0.6944882	125
10	0.001931682	0.027056545	0.03593197	0.769118	124
11	0.002008953	0.027044185	0.0359539	0.6814577	123
12	0.002142072	0.027141852	0.03613158	0.6979288	122

Forecast Statistics for Series DLUSP

Step	Mean Error	Mean Abs Error	RMS Error	Theil U	N.Obs
1	0.001872818	0.023578853	0.03159978	0.7973298	133
2	0.004002224	0.030679745	0.04085512	0.7264861	132
3	0.006007842	0.036855145	0.04790143	0.6782526	131
4	0.007534307	0.041098914	0.0527958	0.6247323	130
5	0.009414828	0.044101275	0.05682126	0.5884529	129
6	0.010901631	0.046274037	0.05900933	0.5499293	128
7	0.0119823	0.046506177	0.06018487	0.5144473	127
8	0.012902827	0.046913006	0.06115972	0.4770023	126
9	0.013796825	0.046625477	0.06173406	0.44443	125
10	0.014220329	0.047151657	0.06233421	0.4180928	124
11	0.014720547	0.047542389	0.06293037	0.3859812	123
12	0.015342343	0.047580979	0.06320691	0.3582338	122

La procédure a été décrite et illustrée par l'analyse du Standard and Poors. Dans la section suivante, on présente les résultats obtenus pour toutes les variables financières d'intérêt.

### 3 Equations obtenues pour les différentes variables financières d'intérêt sur la période 01 :88-09 :98

On ne décrit donc que les équations relatives aux Etats-Unis. On étudie la dynamique d'un indice boursier, le S&P500, ainsi que celle des différents rendements d'obligations définissant la courbe des taux.

En ce qui concerne la courbe des taux, on spécifie d'abord l'équation d'un taux reconnu comme leader. Le choix de ce taux est effectué en se basant, d'une part, sur les recommandations des gestionnaires, d'autre part, sur des analyses statistiques partielles d'exogénéité. Pour les Etats-Unis, le taux à deux ans s'impose comme le taux directeur. La courbe des taux est ensuite estimée en considérant les différents spreads calculés par rapport à ce taux directeur. Les différents spreads sont étudiés par degré d'endogénéité croissant.

Les dates de ruptures introduites, lorsque nécessaire, dans les différentes équations cibles, ont été choisies de manière statistique, indépendamment pour les différentes cibles. Une étude ultérieure visera à homogénéiser les choix pour les différents pays et les différentes variables financières, en fonction de l'interprétation conjoncturelle qui pourra être donnée par les gestionnaires aux changements de régime et/ou aux événements historiques correspondants.

Les variables financières, données par ordre d'endogénéité croissant, sont successivement :

la courbe des taux, avec :

Le taux à deux ans comme taux directeur RYUS2

Le spread trois mois / deux ans SPUS32

Le spread deux ans / dix ans SPUS210

Le spread deux ans / cinq ans SPUS25

Le spread deux ans / trente ans SPUS230

Le spread un an / deux ans SPUS12

et l'indice Standard and Poors, pris en logarithme, LUSP500.

### 3.1 La courbe des taux

Les équations sont les suivantes, dans l'ordre, l'équation de long-terme ou équation-cible et l'équation de court-terme, dite "à correction d'erreur".

*Le taux à deux ans, RYUS2*

*équation de long-terme.*

$$\begin{aligned} RYUS2 = & 14.41 + 0.46 \times GAUSPPIB_4 - 1.49 \times TCHOUS_2 \\ & - 1.26 \times DUM0493 + 1.34 \times DUM0594 - 1.45 \times DUM0495 - 1.2 DUM0797 + Z_{RYUS2} \end{aligned}$$

*équation de court-terme.*

$$\Delta RYUS2 = 0.38 \times \Delta RYUS2_1 - 0.26 \times \Delta TCHOUS_2 - 0.28 \times Z_{RYUS2(1)} + u_{RYUS2}$$

avec les caractéristiques principales de la régression correspondante :

$$R^2 = 0.21, DW = 1.99, p - \text{value de la } Q - \text{stat} = 0.60$$

*Le spread 3mois/2ans, SPUS32*

*équation de long-terme.*

$$\begin{aligned} SPUS32 = & -4.11 + 0.59 \times TCHOUS_2 + 0.27 \times RUYUS_2 \\ & - 0.35 \times GAUSCPI_2 + 0.62 \times DUM0290 - 0.11 \times DUM0295 + Z_{SPUS32} \end{aligned}$$

équation de court-terme.

$$\Delta SPUS32 = 0.39 \times \Delta RYUS2 - 0.18 \times Z_{SPUS32(1)} + u_{SPUS32}$$

avec les caractéristiques principales de la régression correspondante :

$$R^2 = 0.41, DW = 1.54, p - \text{value de la } Q - \text{stat} = 0.71$$

Le spread deux ans/dix ans,  $SPUS210$

équation de long-terme.

$$\begin{aligned} SPUS210 = & -1.07 + 0.60 \times TCHOUS_2 - 0.17 \times RUYUS_2 \\ & -0.59 \times DUM1088 + 0.42 \times DUM0890 - 0.18 \times DUM0191 - 0.25 \times DUM0493 + Z_{SPUS210} \end{aligned}$$

équation de court-terme.

$$\Delta SPUS210 = -0.26 \times \Delta RYUS2 + 0.15 \times \Delta SPUS32 - 0.31 \times Z_{SPUS210(1)} + u_{SPUS210}$$

avec les caractéristiques principales de la régression correspondante :

$$R^2 = 0.48, DW = 1.83, p - \text{value de la } Q - \text{stat} = 0.71$$

Le spread deux ans/cinq ans,  $SPUS25$

équation de long-terme.

$$\begin{aligned} SPUS25 = & -0.59 + 0.11 \times TCHOUS_2 + 0.50 \times SPUS210 + 0.07 \times SPUS32 \\ & -0.07 \times DUM0197 + Z_{SPUS25} \end{aligned}$$

équation de court-terme.

$$\Delta SPUS25 = 0.06 \times \Delta SPUS32 + 0.55 \times \Delta SPUS210 + 0.09 \times \Delta SPUS25_1 - 0.49 \times Z_{SPUS25(1)} + u_{SPUS25}$$

avec les caractéristiques principales de la régression correspondante :

$$R^2 = 0.80, DW = 2.02, p - \text{value de la } Q - \text{stat} = 0.30$$

Le spread deux ans/trente ans,  $SPUS230$

équation de long-terme.

$$\begin{aligned} SPUS230 = & 0.25 + 0.06 \times TCHOUS_2 + 1.40 \times SPUS210 - 0.40 \times SPUS25 - 0.07 \times TYUS2 \\ & -0.09 SPUS32 + 0.10 \times DUM0392 + Z_{SPUS230} \end{aligned}$$

équation de court-terme.

$$\begin{aligned}\Delta SPUS230 = & -0.14 \times \Delta RYUS2 - 0.19 \times \Delta SPUS25 + 1.14 \times \Delta SPUS210 + 0.21 \times \Delta SPUS210_1 \\ & - 0.28 \times \Delta SPUS24_1 - 0.38 \times Z_{SPUS230(1)} + u_{SPUS230}\end{aligned}$$

avec les caractéristiques principales de la régression correspondante :

$$R^2 = 0.94, DW = 1.99, p - \text{value de la } Q - \text{stat} = 0.71$$

Le spread deux ans/un an,  $SPUS12$

équation de long-terme.

$$\begin{aligned}SPUS12 = & -0.81 + 0.21 \times TCHOUS_2 - 0.12 \times GAUSCPI_1 - 0.31 \times DUM0788 \\ & + 0.42 \times DUM0290 - 0.23 \times DUM0495 + 0.28 \times DUM0496 - 0.38 \times DUM1097 + Z_{SPUS12}\end{aligned}$$

équation de court-terme.

$$\Delta SPUS12 = -0.11 \times \Delta RYUS2 + 0.49 \times \Delta SPUS32 - 0.41 \times Z_{SPUS12(1)} + u_{SPUS12}$$

avec les caractéristiques principales de la régression correspondante :

$$R^2 = 0.55, DW = 2.14, p - \text{value de la } Q - \text{stat} = 0.88$$

### 3.2 L'indice Standard and Poors (pris en logarithme) $LUSP500$

On redonne ici les résultats présentés dans la première section.

équation de long-terme.

$$\begin{aligned}LUSP500 = & -10.3 + 1.9 \times LUSVPIB_4 - 0.09 \times RYUS30 - 0.08 \times DUM0890 \\ & - 0.13 \times DUM0293 + 0.10 \times DUM0296 + 0.15 \times DUM1296 + Z_{LUSP500}\end{aligned}$$

équation de court-terme.

$$\Delta LUSP500 = 0.01 - 0.07 \times \Delta RYUS30 + 0.06 \times \Delta SPUS12 - 0.28 \times Z_{LUSP500(1)} + u_{LUSP500}$$

avec les caractéristiques principales de la régression correspondante :

$$R^2 = 0.395, DW = 1.80, p - \text{value de la } Q - \text{stat} = 0.40$$

### 3.3 Quelques validations statistiques

#### *La stationnarité des résidus de long terme*

Les résultats présentés dans le tableau ci-dessous permettent de valider la stationnarité du résidu des équations de long terme. Il suffit pour cela de comparer la statistique de Phillips et Perron de la table ad-hoc (colonne  $Z_\tau$  Tabulée) avec la statistique calculée à partir des données observées (colonne  $Z_\tau$ ). Lorsque la valeur de la statistique de la deuxième colonne est inférieure à celle de la statistique de la première colonne, on conclut à la stationnarité du résidu.

Stationnarité des résidus de long terme			
Etats-Unis			
	$Z_\tau$ Tabulé	$Z_\tau$	Validation
[gray]0.95 Taux à 2 ans	-4.015	-6.356	ok
Spread 3mois-2ans	-3.684	-3.868	ok
Spread 2ans-10ans	-3.673	-7.123	ok
Spread 2ans-5ans	-3.391	-6.207	ok
Spread 2ans-30ans	-3.946	-6.053	ok
Spread 1an-2ans	-4.174	-8.038	ok
S&P500	-4.089	-5.634	ok

On conclut donc à la stationnarité des résidus de toutes les relations de long terme<sup>10</sup>.

#### *L'Homoscédasticité des résidus de court terme*

Il existe dans la littérature statistique un grand nombre de tests qui permettent de contrôler l'hétéroscédasticité d'une série temporelle, les plus célèbres étant le test de Goldfeld-Quandt [1965], le test de Breusch-Pagan/Godfrey [1979] ou encore le test de White [1980]. Nous avons décidé, pour des raisons de simplicité de mise en œuvre, de retenir le test de Goldfeld-Quandt.

*Principe du test :* On suppose que les observations peuvent être divisé en deux groupes (de taille  $n_1$  et  $n_2$ ) tels que, sous l'hypothèse nulle d'homoscédasticité, la variance soit la même dans les deux groupes. Pour obtenir des estimateurs de variance statistiquement indépendants, on estime séparément la régression dans les deux groupes. La statistique de test est alors :

$$F(n_1 - K, n_2 - k) = \frac{\frac{u_1' u_1}{n_1 - K}}{\frac{u_2' u_2}{n_2 - K}}$$

On contrôle enfin le résultat du test en comparant cette valeur avec la valeur tabulée dans la table de Fisher.

*Résultats :* Notre échantillon a été divisé en deux sous-périodes : la première 01 :88-08 :91 avec  $n_1 = 44$  observations et la deuxième 03 :95-09 :98 avec  $n_2 = 43$  observations. Les résultats du test des différentes variables étudiées sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

<sup>10</sup>On notera toutefois qu'il existe un écart très important entre les valeurs tabulées et les valeurs observées.



### Homoscédasticité des résidus de court terme

	Etats-Unis		
	$F_{(n_1-K, n_2-K)}$	Significativité	Homoscédasticité
Taux à 2 ans	$F_{(39,40)} = 1.31455$	0.19642	ok
Spread 3mois-2ans	$F_{(40,41)} = 1.82004$	0.02982	<b>ko</b>
Spread 2ans-10ans	$F_{(39,40)} = 1.07060$	0.41514	ok
Spread 2ans-5ans	$F_{(38,39)} = 1.95052$	0.02044	<b>ko</b>
Spread 2ans-30ans	$F_{(36,37)} = 0.64318$	0.90588	ok
Spread 1an-2ans	$F_{(39,40)} = 1.75808$	0.03974	<b>ko</b>
S&P500	$F_{(39,40)} = 2.00507$	0.01557	<b>ko</b>

On conclut à l'homoscédasticité du résidu de court terme pour trois des sept variables étudiées, à savoir le taux à deux ans, le spread 2ans-10ans et le spread 2ans-30ans. Pour les quatre variables restantes, cette hypothèse n'est pas vérifiée et il convient de procéder à un traitement particulier.

*Comment corriger l'hétéroscédasticité ?*

L'un des outils les plus intéressants pour caractériser les problèmes de variances variables a été introduit par Engel [1982] : il s'agit de l'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive (ARCH) et de ses nombreuses extensions.

Pour cela, on considère un processus stochastique en temps discret  $(\varepsilon_t)$  de la forme :

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t \quad \text{où } z_t \text{ est i.i.d., } E[z_t] = 0 \text{ et } Var(z_t) = 1$$

où  $\sigma_t$  est une fonction non constante mesurable positive.

Une paramétrisation possible pour  $\sigma_t$  a été suggérée par Engle [1982] dans son papier fondateur : on exprime linéairement  $\sigma_t^2$  en fonction des carrés des valeurs passées du processus :

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

où  $a_0 > 0$  et  $a_i \geq 0$  pour tout  $i$ .

Ce modèle, connu sous le nom de ARCH(q) linéaire, permet de prendre en compte le fait qu'une forte variation de prix soit suivi par une autre forte variation de prix, mais dont le signe n'est pas prévisible.

*Résultats :* Les résultats<sup>11</sup> des estimations sont résumés dans le tableau ci-dessous :

<sup>11</sup>Au vu du signe (négatif) de deux des coefficients, on peut mettre en doute le choix de la famille de modèles retenue. Il serait intéressant d'effectuer une étude plus approfondie de ce problème d'hétéroscédasticité.

### Correction de l'hétéroscédasticité

Etats-Unis

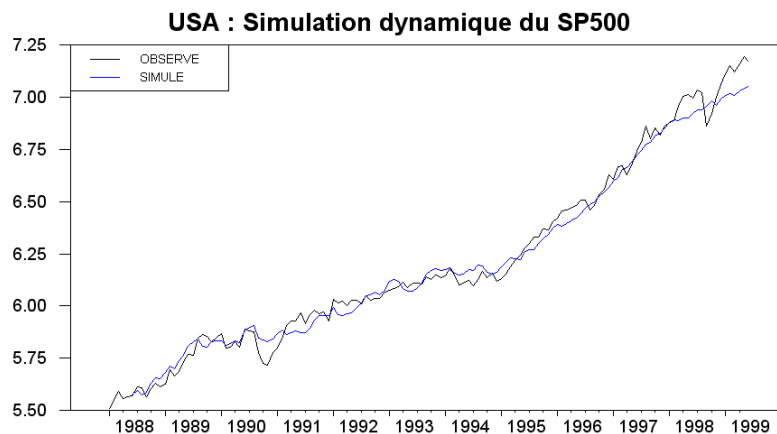
	Spread 3m-2y	Spread 2y-5y	Spread 1y-2y	S
P500				
$a_0$	0.02	0.002	0.005	0.0007
$\sigma_{a0}$	0.0031	0.0001	0.0011	0.0002
$a_1$	0.25	0	0.37	0.03
$\sigma_{a1}$	0.1044		0.1855	0.1029
$a_2$	-0.08	0		0.39
$\sigma_{a2}$	0.0323			0.1486
$a_3$	0.25	-0.09		
$\sigma_{a3}$	0.1092	0.008		

## 4 Estimation de nouvelles relations-cible sur la période 01 : 88 - 06 : 99

On considère ici, à titre illustratif, le cas de l'indice Standard and Poors. On étudie la relation de long-terme en considérant l'ensemble des observations sur la période 01 :88-06 :99.

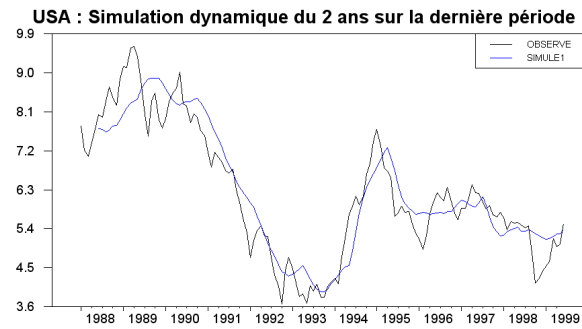
### 4.1 Des écarts significatifs

On montre, à titre de comparaison, la série observée et la série simulée jusqu'au mois de Juin 1999, lorsque la relation de long terme estimée sur la période 01 :88-09 :98 est étendue sans modification sur toute la période.

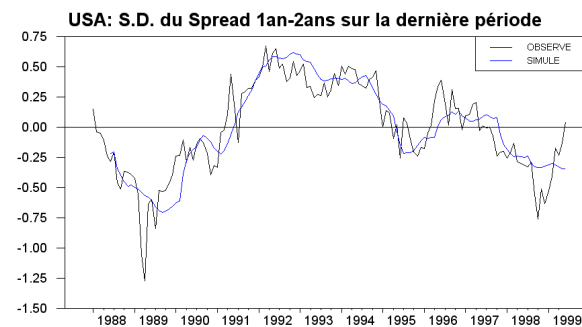


Graphique 2.3. Simulation dynamique du S&P

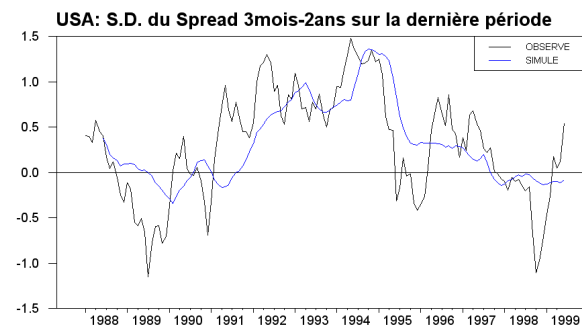
On observe un écart qui semble significatif sur les derniers mois. Une nouvelle rupture est candidate, positionnée, sur la base d'arguments graphiques, en Janvier 1999. De la même manière, on observe des écarts significatifs entre la série simulée (en échantillon) et la série observée, sur la dernière période quand on considère certains spreads de la courbe des taux : SPUS32, SPUS12 et le taux directeur RYUS2.



Graphique 2.4. *Simulation dynamique du 2 ans*



Graphique 2.5. *Simulation dynamique du Spread 1 an - 2 ans*

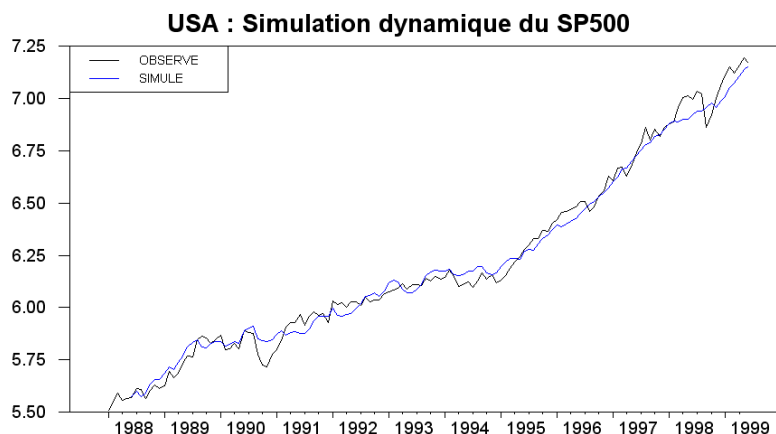


Graphique 2.6. *Simulation dynamique du Spread 3 mois - 2 ans*

On décide alors d'introduire une nouvelle rupture sur la période récente, pour les différentes variables retenues, à savoir :

- une rupture en 01 :99 pour l'indice LUSP500,
- une rupture en 09 :98 pour le taux à 2 ans,
- une rupture en 04 :96 pour le spread 3 mois- 2 ans,
- une rupture en 03 :99 pour le spread 1 an - 2 ans.

Partant des nouvelles équations à correction d'erreur représentant la dynamique des différentes variables financières des Etats-Unis, on simule l'indice Standard and Poors, en échantillon jusqu'en Juin 1999 et on observe que l'écart entre la série simulée et la série observée, souligné précédemment, est effectivement corrigé.



Graphique 2.7. *Simulation dynamique du S&P500 corrigé*

Le problème dans le cas présent est que la stationnarité du résidu  $Z_{LUSP500}$  n'est pas remise en cause lorsqu'on étudie la dynamique de Janvier 1988 à Juin 1999, en conservant la relation cible estimée sur la période 01 :88-09 :98 (équation 2). On reste en effet en deçà du seuil critique de  $-3,99$  calculé sur l'ensemble de la période. Statistiquement, on ne peut donc pas justifier la nécessité d'introduire une nouvelle rupture sur la période la plus récente. La même constatation peut être faite pour les autres variables financières. Il semble que les relations cibles estimées sur la période 01 :88-09 :98 soient associés à des résidus  $Z$  « trop stationnarisés ».

#### 4.2 En pratique

Dans le cadre d'une utilisation opérationnelle du modèle, la démarche qui doit être adoptée est la suivante :

On se situe au mois  $t$  et on a estimé des relations cibles sur la période 01 :88- $(t-1)$ , en utilisant des tables ad-hoc valables pour le nombre  $n$  d'observations correspondant au nombre de mois entre Janvier 88 et  $t-1$ .

On calcule à nouveau les seuils critiques de la statistique de Phillips-Perron pour juger de la stationnarité du résidu des régressions de long-terme décrivant les mêmes relations cibles, en tenant compte de  $n+1$  observations, incluant le mois courant  $t$ . Puis on calcule la valeur de la statistique sur la trajectoire 01 :88- $t$ . Si la statistique reste en deçà du seuil critique nouvellement calculé (négatif), on n'introduit pas de rupture. Dans le cas contraire, on recherche une nouvelle rupture. Celle-ci est recherchée en minimisant la valeur de la statistique de Phillips-Perron sur l'ensemble des 12 (18 ?) derniers mois. Pour la position correspondant au minimum, on simule une nouvelle table, qui fournit le nouveau seuil critique : celui-ci correspond au fractile d'une distribution empirique conditionnelle de la statistique de Phillips-Perron. Cette distribution est en effet obtenue en simulant un nombre suffisant de trajectoires pour lesquelles on reconnaît la cointégration se limitant aux  $n$  premiers points, tout en concluant à l'absence de cointégration lorsqu'on ajoute une nouvelle observation.

## Chapitre 3

# VALUE AT RISK

---

La Value at Risk (VaR) connaît ces dernières années un développement important dans le domaine de la banque, de la finance et de l'assurance. Elle est devenu un concept majeur en matière de gestion des risques au point qu'en 1993, le Groupe des Trente (forum international composé de banquiers, d'autorités de contrôle et d'académiciens) a publié un document intitulé « Derivatives : Practices and Principles » recommandant l'usage de la VaR comme critère de mesure du risque de marché.

*La VaR d'un portefeuille au risque de  $\alpha$  % pour un horizon donné peut être définie ainsi : si on exclut les  $\alpha$  % des occurrences les plus catastrophiques pour la valorisation du portefeuille, la VaR correspond à la perte maximale (exprimée en %) que le portefeuille peut subir.*

Cette définition permet de bien prendre conscience des avantages de la VaR sur les autres méthodes de gestion du risque : c'est une mesure absolue du risque d'un portefeuille qui permet une gestion efficace sur des horizons différents (un jour, un mois ou trois mois). En pratique, la VaR permet à la fois un reporting interne au management, un reporting externe aux autorités de contrôle, une allocation des ressources (en fixant des limites pour chaque activité) et une mesure efficace et cohérente des performances.

### 1 Une théorie bien définie

Le risque de marché représente le risque auquel est confronté un investisseur en raison de l'incertitude qui pèse sur les évolutions défavorables du cours des titres qu'il possède dans

son portefeuille. De ce fait, un critère d'évaluation du risque de marché tel que la *VaR* ne doit prendre en compte que le risque de perte.

### 1.1 Une définition simple

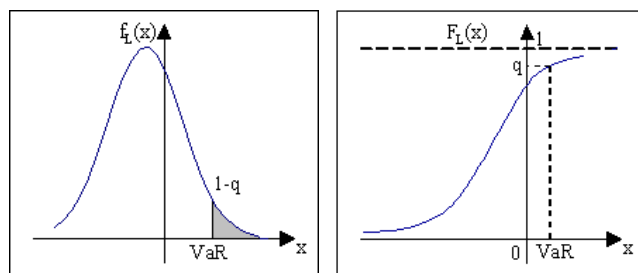
Considérons un actif dont la valeur à un instant  $t$  est notée  $V_t$ . On définit alors la perte<sup>1</sup> subie sur cet actif durant une période  $[s;t]$  par

$$L_{s,t} = V_s - V_t$$

On suppose par ailleurs que la valeur de cet actif et donc des pertes associées à cet actif évoluent de manière stationnaire. Ainsi on peut remplacer l'intervalle  $[s;t]$  par l'intervalle  $[0;t-s]$  et la variable  $L$  n'aura plus pour indice que la seule durée de l'intervalle.

La *Value at Risk* de l'actif pour la durée  $t$  et le niveau de probabilité  $q$  se définit comme la perte encourue maximale sur cet actif durant l'intervalle  $[0;t]$  pour une probabilité de  $(1 - q)$  :

$$\Pr [L_t > VaR] = 1 - q \quad \Longleftrightarrow \quad \Pr [L_t \leq VaR] = q$$



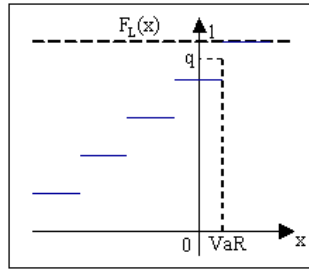
Graphique 3.1. Définition de la *Value at Risk*

Il existe donc deux paramètres dans la définition de la notion de *VaR* : la durée  $t$  et la probabilité  $q$ . En pratique, on fixe une fois pour toute la durée de calcul de la *VaR* (un jour, une semaine ou un mois) et on calcule la *VaR*<sup>2</sup> en fonction de la probabilité  $q$

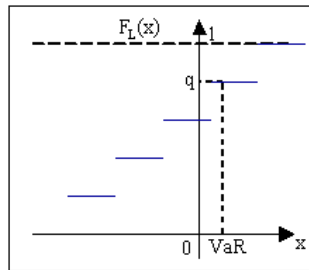
Toutefois, cette définition pose un certain nombre de problèmes liés notamment à l'existence et à la caractérisation de la fonction de densité. Pour les variables discrètes par exemple, la *VaR* n'est pas défini de façon précise et dans le cas où  $q$  correspond à un saut de la fonction de répartition, aucune valeur de la perte ne peut convenir.

<sup>1</sup>Il ne s'agit d'une vraie perte que lorsque la valeur de  $L_{s,t}$  est positive. Dans le cas contraire, il s'agit d'un bénéfice.

<sup>2</sup>On notera  $VaR_q$  une *VaR* avec une probabilité  $q$  lorsqu'il y aura un risque de confusion.

Graphique 3.2. *Value at Risk : Discret*

De la même manière, lorsque  $q$  correspond à un palier de la fonction de répartition, une infinité de valeurs conviennent et on choisit, par sécurité, de prendre la valeur la plus défavorable, c'est à dire la plus grande.

Graphique 3.3. *Value at Risk : Discret*

De ce fait, la définition rigoureuse de la  $VaR$  s'écrit alors sous la forme :

$$VaR_q = \max \{V : \Pr [L_t \leq V] \leq q\}$$

Remarque :

Lorsque la variable aléatoire  $L_t$  suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ , on peut écrire :

$$\Pr \left[ \frac{L_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaR_q - \mu}{\sigma} \right] = q$$

Et si on note  $z_q$  le quantile d'ordre  $q$  de la distribution normale, on obtient une formule très simple de la  $VaR$  :

$$VaR_q = \mu + z_q \sigma$$

## 1.2 $VaR$ d'un portefeuille

Considérons un portefeuille constitué de  $N$  actifs en nombre respectifs  $n_1, \dots, n_2$ . Si on note  $p_j$  le prix du  $j^{ème}$  titre et  $p_p$  le prix du portefeuille, la variation relative de prix du portefeuille obéira à la relation :

$$\Delta p_p = \sum_{j=1}^N n_j \Delta p_j$$

où  $\Delta p = \frac{(p_t - p_{t-1})}{p_{t-1}}$ .

Le choix d'une variation relative sur une variation absolue permet d'une part de relativiser le poids des différents facteurs pouvant intervenir dans l'évaluation d'un portefeuille, et d'autre part, de fournir une variable pouvant posséder certaines propriétés distributionnelles.

Mais, il n'est en général pas possible de déduire la loi de probabilité du portefeuille et ce même si on connaît la distribution des différents  $\Delta p$ . La loi de probabilité d'une somme de variables aléatoires n'est aisée à déterminer que si celles-ci sont indépendantes, ce qui n'est bien évidemment pas le cas ici.

Cependant, si on suppose une distribution normale du portefeuille, on peut aisément déterminer la *VaR* de ce dernier à partir des deux premiers moments :

$$VaR_q = -E[\Delta p_p] + z_q \sigma(\Delta p_p)$$

On détermine alors les deux premiers moments de la distribution des variations du portefeuille :

$$\begin{aligned} E[\Delta p_p] &= \sum_{j=1}^N n_j E[\Delta p_j] \\ Var(\Delta p_p) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N n_i n_j Cov(\Delta p_i, \Delta p_j) \end{aligned}$$

*Remarques :* L'utilisation de cette relation présente cependant deux inconvénients majeurs : d'une part, elle suppose la normalité de la distribution du portefeuille, et d'autre part, elle nécessite de connaître un grand nombre de paramètres ( au total  $N*(N+3)/2$  ).

En pratique, la loi de distribution des portefeuilles est rarement normale et possède des queues de distribution beaucoup plus épaisses que celles d'une loi normale<sup>3</sup>. Les distributions leptocurtiques, les lois de Laplace et les lois  $\alpha$ stables de Levy sont généralement plus appropriées.

Par ailleurs, la taille des portefeuilles dans les sociétés de gestion est en général très importante (une centaine de lignes environ) et ce pour des soucis de réduction du risque globale par diversification. Dans le cas d'un portefeuille possédant  $N = 100$  titres différents par exemple, il faut connaître un nombre de paramètres très important : au total  $100*(100+3)/2 = 5150$ .

## 2 Estimation de la VaR

La présentation du critère *VaR* telle que nous l'avons faite, montre qu'il est relativement aisé de déterminer la *VaR* dès lors que l'on connaît la fonction de répartition de la variable

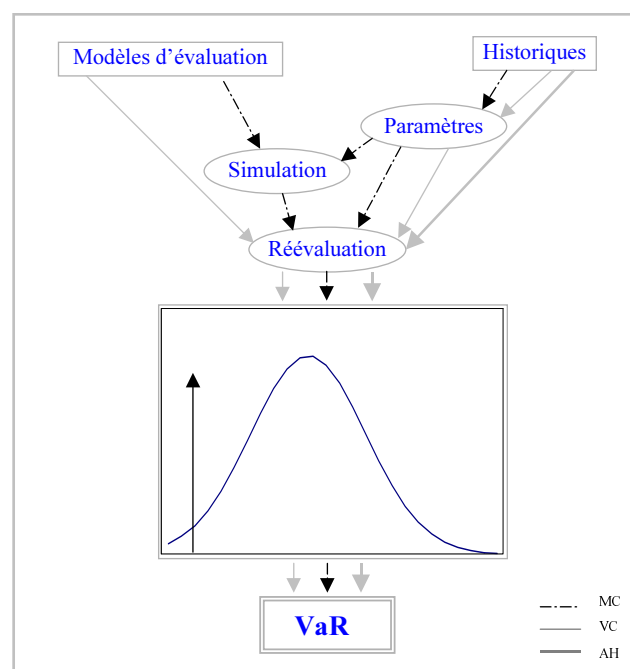
---

<sup>3</sup>Les rendements quotidiens des actions ont par exemple une distribution de Pareto ou de Student.



aléatoire "perte". Trois méthodes de calcul de la *VaR* ont fait leur preuve à l'heure actuelle : la méthode de l'analyse historique, la méthode de la matrice des variances-covariances estimée et la technique de simulation de Monté Carlo. Les trois hypothèses principales qui permettent de différencier ces techniques d'estimation portent sur la distribution des prix des actifs, sur les modèles d'évaluation des prix des actifs et enfin sur la stationnarité des variations de prix des différents facteurs de risque.

Les schémas directeurs de ces trois méthodes d'estimations sont résumés dans la figure ci-dessous :



Graphique 3.4. Estimation de la *VaR*

## 2.1 Une première étape obligatoire

L'étape préliminaire consistant à choisir les facteurs de risque sur lesquels vont être projetés les différentes lignes des portefeuilles est primordiale. Il existe, en effet, un nombre important de titres et de produits dérivés, et ce, sur différentes places boursières. Donc un nombre important de taux de change et un nombre tout aussi important de maturités possibles pour ces produits. De plus, toutes ces caractéristiques peuvent être combinées et donner ainsi une infinité de titres possibles.

Le choix des facteurs de risque est l'un des problèmes les plus épineux que nous ayons rencontré. Il faut, en effet, effectuer un savant arbitrage entre la précision des résultats, la cohérence des facteurs retenus, leur interprétabilité par les gérants et une économie des moyens de calculs.

De ce fait, les facteurs de risque que nous avons décidé de retenir ne concerne que cinq pays : l'Allemagne, les Etats-Unis, la France, le Japon et le Royaume Uni. On trouve

Un taux directeur de la courbe des taux : le taux à deux ans pour les Etats-Unis, le Japon et le Royaume Uni, et le taux à trois mois pour l'Allemagne.

La courbe des taux via certains spreads (sauf pour la France)  
 Les taux de change par rapport au Dollar (sauf pour la France)  
 Un indice boursier (DAX, S&P500, CAC, NIKKEI et FSTE)

*Remarque* : Pour la méthode de la matrice de variances-covariances estimée, *RiskMetrics<sup>TM</sup>* propose d'utiliser comme facteurs de risque :

30 taux de change et 30 indices boursiers nationaux pour la représentation des actions à l'aide de leur « bêta »  
 14 points de la courbe des taux d'intérêt zéro-coupon pour la représentation des instruments à taux fixe comme les obligations  
 un panel représentatif de matières premières

## 2.2 Deux méthodes intéressantes ...

Ecureuil Gestion a des besoins très spécifiques en matière de gestion du risque et nous avons été contraint de choisir la méthode qui satisfasse au mieux les attentes des gestionnaires. De ce fait, nous ne ferons ici qu'une présentation des méthodes de la matrice des variances-covariances estimée et de l'analyse historique, et justifierons notre choix pour la méthode de Monté Carlo.

### *Méthode de la matrice des variances-covariances estimée*

La méthode de la matrice des variances-covariances estimée est à ce jour la plus utilisée dans le monde et ce grâce à une banque américaine : JP. Morgan. Le développement de cette méthode par JP. Morgan dans le début des années 1980 a permis à la *Value at Risk* de connaître son succès actuel. D'ailleurs, il arrive très souvent que les spécialistes appellent cette méthode la "VaR JP. Morgan".

Cette technique nécessite préalablement à son calcul deux étapes importantes : tout d'abord, la détermination des facteurs de risque en lesquels les actifs présents dans les différents portefeuilles peuvent être décomposés, et ensuite la répartition des différents cash-flows associés à ces facteurs de risque.

*Des hypothèses contraignantes.* Tous les fondements de cette méthode reposent sur la normalité des facteurs de risque et des rendements des différents actifs. Cette hypothèse permet, en effet, de simplifier énormément le calcul de la *VaR* puisque cette dernière devient un simple multiple de l'écart type du portefeuille, qui est lui même une fonction linéaire des écarts types et des covariances des différents actifs présents dans le portefeuille.

La méthode présuppose donc l'évaluation des moyennes et des variances de tous ces facteurs. Toutefois, ces moyennes et variances ne sont pas calculer grâce à la méthode historique standard mais suivant une pondération qui accorde plus d'importance aux observations récentes. On définit un  $\lambda^4$  compris entre 0 et 1 (plus il est proche de 1 et plus le passé proche est important) et on calcule les paramètres suivants :

<sup>4</sup> *RiskMetrics<sup>TM</sup>* utilise en pratique des valeurs de  $\lambda$  égales à 0.94 et 0.97 pour une périodicité des observations égale respectivement à 1 jour et à 1 mois. Ces valeurs ont été obtenus en optimisant un critère de qualité des prévisions.

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= (1-\lambda) \sum_{j=1}^T \lambda^{j-1} (R_{t-j} - \bar{R})^2 \\ \sigma_{12,t} &= (1-\lambda) \sum_{j=1}^T \lambda^{j-1} (R_{1,t-j} - \bar{R}_1) (R_{2,t-j} - \bar{R}_2)\end{aligned}$$

Cette pondération permet de ne pas garder en mémoire toutes les données intervenant dans les formules. En effet, si on suppose  $T$  très grand, on peut facilement obtenir les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1}^2 &= \lambda \sigma_t^2 + (1-\lambda) (R_t - \bar{R})^2 \\ \sigma_{12,t+1} &= \lambda \sigma_{12,t} + (1-\lambda) (R_{1,t} - \bar{R}_1) (R_{2,t} - \bar{R}_2)\end{aligned}$$

Par ailleurs, si on veut utiliser dans le calcul de la *VaR* les paramètres obtenus lors de l'estimation sur un échantillon des variations de prix passées, il est nécessaire de supposer la stationnarité des processus considérés.

*Calcul de la VaR pour un portefeuille de valeurs linéaires.* Considérons un portefeuille constitué de  $N$  actifs<sup>5</sup> en nombres respectifs  $n_1, \dots, n_N$  s'exprimant à partir des facteurs de risque  $X_1, \dots, X_n$  :

$$p_j = \alpha_{j1}X_1 + \dots + \alpha_{jn}X_n \quad j = 1, \dots, N$$

La valeur du portefeuille s'écrit

$$\begin{aligned}p_p(t) &= \sum_{j=1}^N n_j p_j(t) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N n_j a_{jk} \right) X_k(t)\end{aligned}$$

et ses variations entre les dates  $t-1$  et  $t$

$$\begin{aligned}\Delta p_p(t) &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N n_j a_{jk} \right) (X_k(t) - X_k(t-1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^N n_j a_{jk} X_k(t-1) \right) \frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k(t-1) \Delta_k(t)\end{aligned}$$

<sup>5</sup>On peut considérer identiquement des obligations, des actions, des positions de change, des matières premières, des swaps d'intérêt et de change, des FRA, ...

où  $x_k(t-1)$  peut s'interpréter comme le montant investi en  $(t-1)$  dans le  $k^{ième}$  facteur de risque.

On suppose que l'horizon de calcul de la  $VaR$  est l'époque 1 et que la période à laquelle on effectue les calculs est l'époque 0. On suppose également connus :

Les positions actuelles en les différents facteurs de risque :

$$x_k(0) = x_k \quad k = 1, \dots, n$$

L'estimation des moyennes et variances historiques :

$$\begin{aligned} E[\Delta_k(1)] &= E_k & k = 1, \dots, n \\ Var(\Delta_k(1)) &= \sigma_k^2 = \sigma_{kk} & k = 1, \dots, n \\ Cov(\Delta_k(1), \Delta_l(1)) &= \sigma_{kl} & k, l = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Et on calcule ainsi la  $VaR$  grâce à l'équation :

$$\begin{aligned} VaR_q &= -E[\Delta p_p] + z_q \sigma(\Delta p_p) \\ &= -\sum_{k=1}^n x_k E_k + z_q \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_k x_l \sigma_{kl}} \end{aligned}$$

*Cas particulier des actions.* On traite les actions par un modèle comparable au modèle à indice simple de Sharpe. Ce modèle postule que la variation de prix d'une action est une fonction du premier degré de la variation d'un indice représentatif du marché.

$$\Delta p_j = \alpha_j + \beta_j \Delta I + \Delta \varepsilon_j \quad j = 1, \dots, N$$

où  $\alpha$  et  $\beta$ <sup>6</sup> s'évaluent par les techniques standards de régression.

Dans ce cas, il est facile d'obtenir :

$$VaR_q = -\alpha_P - \beta_P E_I + z_q \sqrt{\beta_P^2 \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^N n_j^2 \sigma_{\varepsilon_j}^2}$$

*Calcul de la VaR pour un portefeuille de valeurs non linéaires.* Les produits non linéaires représentent un réel problème pour la technique de la matrice des variances-covariances estimée car l'application de cette méthode est basée sur le fait qu'une combinaison linéaire de variables normales est distribuée suivant une loi normale.

<sup>6</sup>Le coefficient  $\beta$  mesure la sensibilité de l'actif en question par rapport à l'indice : plus  $\beta$  est grand, plus une variation sur le marché sera répercutée sur le prix de l'action.

Pour palier à ce problème, on suppose que les variations de prix du sous-jacent sont distribuées suivant une loi normale et on effectue un développement de Taylor du modèle d'évaluation retenu. Il convient de pousser le développement jusqu'à l'ordre 2 afin de tenir compte des évolutions de prix du sous-jacent.

On va considérer plus particulièrement le cas d'une option évaluée grâce à la formule de Black & Sholes :

$$\begin{aligned}\Delta p_t &= f'_S(S_t, K, \tau, \sigma_t, R_F) \Delta S_t + \frac{1}{2} f''_{SS}(S_t, K, \tau, \sigma_t, R_F) (\Delta S_t)^2 + f'_K(S_t, K, \tau, \sigma_t, R_F) \Delta K \\ &\quad + f'_\tau(S_t, K, \tau, \sigma_t, R_F) \Delta \tau + f'_\sigma(S_t, K, \tau, \sigma_t, R_F) \Delta \sigma_t + f'_R(S_t, K, \tau, \sigma_t, R_F) \Delta R_t \\ &= \Delta \cdot \Delta S_t + \frac{1}{2} \Gamma \cdot (\Delta S_t)^2 + f'_K \cdot \Delta K - \Theta \cdot \Delta \tau + V \cdot \Delta \sigma_t + P \cdot \Delta R_t\end{aligned}$$

Dans la pratique, on se limite principalement aux paramètres  $\Delta$ ,  $\Gamma$  et  $\Theta$  :

$$\Delta p_t = \Delta \cdot \Delta S_t + \frac{1}{2} \Gamma \cdot (\Delta S_t)^2 - \Theta \cdot \Delta \tau$$

La distribution de  $\Delta p_t$  est ensuite déterminée en recherchant dans la famille des distributions de Johnson, celle qui égalise les quatre premiers moments de  $\Delta p_t$  :

$$\begin{aligned}E[\Delta p_t] &= \frac{1}{2} \Gamma \cdot \sigma_t^2 - \Theta \cdot \Delta \tau \\ \text{Var}(\Delta p_t) &= \Delta^2 \cdot \sigma_t^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 \cdot \sigma_t^4 \\ \gamma_1(\Delta p_t) &= \frac{\Gamma \cdot \sigma_t (3\Delta^3 + \Gamma^2 \cdot \sigma_t^2)}{(\Delta^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 \cdot \sigma_t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \gamma_1(\Delta p_t) &= \frac{3[(1 - \Delta^4) + 3\Delta^2 \cdot \Gamma^2 \cdot \sigma_t^2 + \frac{3}{4} \Gamma^4 \cdot \sigma_t^4]}{\Delta^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 \cdot \sigma_t^4}\end{aligned}$$

Plus précisément, parmi les quatre relations

$$\begin{aligned}\Delta S_t &= a + b \frac{\Delta p_t - c}{d} \\ \Delta S_t &= a + b \cdot \ln \left( \frac{\Delta p_t - c}{d} \right) \\ \Delta S_t &= a + b \cdot \arcsin h \left( \frac{\Delta p_t - c}{d} \right) \\ \Delta S_t &= a + b \cdot \ln \left( \frac{\Delta p_t - c}{c + d - \Delta p_t} \right)\end{aligned}$$

qui définissent respectivement des lois normales, lognormales, non bornées et bornées, on détermine la loi et les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  tels que  $\Delta S_t$  suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_t$ .

On reprend ensuite la définition initiale de la VaR basée sur le quantile

$$\Pr [L_t \leq VaR] = q$$

et on résout l'équation  $S_t = -z_q$  par rapport à  $\Delta p_t$ .

*En conclusion.* La présente méthode d'évaluation de la VaR détermine, dans un premier temps, le paramètre VaR pour chacun des facteurs de risque séparément, puis dans un deuxième temps, les agrège par l'intermédiaire de la matrice des variances-covariances estimée. De ce fait, cette méthode est souvent présentée comme une "méthode locale" de calcul de la VaR en opposition avec les méthodes qui déterminent directement la VaR du portefeuille sans calculer celles des facteurs de risque pris séparément.

La méthode de la matrice des variances-covariances estimée est donc une bonne méthode à condition que les hypothèses de base (normalité conditionnelle, linéarité, stationnarité) soient satisfaites. Pour cela, il est parfois nécessaire d'effectuer un traitement particulier sur certains titres complexes (les options par exemple). Mais, le principal reproche de cette méthode est qu'elle demande un volume très important de données.

#### *Méthode historique*

La méthode d'estimation de la VaR par analyse historique repose sur l'hypothèse que la distribution des variations de prix observée à partir de l'historique va se reproduire dans l'avenir. Dans les faits, cela revient à supposer que les variations de prix des différents facteurs de risque sont stationnaires.

Comme précédemment, il convient de bien identifier les facteurs de risque qui nous permettent de déterminer la valeur des actifs en portefeuille.

On évalue ensuite les variations relatives de chaque facteurs de risque :

$$\Delta_k(t) = \frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)} \quad k = 1, \dots, n \quad t = -T+1, \dots, 0$$

Les données présentes nous permettent alors d'estimer la distribution des valeurs futures des facteurs de risque

$$X_k^{(t)}(1) = X_k(0) \cdot (1 + \Delta_k(t)) \quad k = 1, \dots, n \quad t = -T+1, \dots, 0$$

et donc la distribution de la perte encourue

$$L_k^{(t)} = X_k(0) - X_k^{(t)}(1) = -\Delta_k(t) \cdot X_k(0) \quad k = 1, \dots, n \quad t = -T+1, \dots, 0$$

*Cas particulier d'un actif.* Considérons un actif dépendant de plusieurs facteurs de risque  $p = f(X_1, \dots, X_n)$  dont on souhaite déterminer la VaR. On évalue les variations futures des facteurs de risque  $X_1^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1)$  en utilisant la méthode ci-dessus. De là, on déduit une estimation de la distribution du prix futur de l'actif

$$p^{(t)}(1) = f\left(X_1^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1)\right) \quad t = -T+1, \dots, 0$$

et par différence, une estimation de la distribution de la perte subie

$$L^{(t)} = p(0) - p^{(t)}(1) \quad t = -T + 1, \dots, 0$$

*Quelques remarques importantes.*

Dans le cas d'un portefeuille, la méthode est similaire à celle d'un actif isolé. On termine simplement l'estimation de la  $VaR$  en déterminant la distribution de la perte subie par le portefeuille

$$\begin{aligned} L^{(t)} &= p_P(0) - p_P^{(t)}(1) \\ &= \sum_{j=1}^N n_j p_j(0) - \sum_{j=1}^N n_j p_j^{(t)}(1) \end{aligned}$$

Il est déconseillé de calculer la  $VaR$  en utilisant la formule suivante

$$VaR_q = E[L_t] + z_q \cdot \sigma(L_t)$$

car cette dernière suppose la normalité de la distribution alors que cette méthode en est indépendante.

La CHASE MANHATTAN BANK N.A. , dans son système  $Risk\$^{TM}$  d'évaluation de la  $VaR$ , propose pour le calcul d'une  $VaR$  à 1 jour d'utiliser un historique de  $T = 100$  jours.

*Exemple d'un portefeuille action.* Considérons un portefeuille constitué de cinq actions en nombres respectifs

$$n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 5, n_4 = 4, n_5 = 6$$

pour lesquels on a observé les cours à 11 époques ( $T = 10$ ).

t	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
-10	12800	23475	1238	2800	129
-9	13150	23150	1236	2765	134
-8	12150	21875	1168	2715	145
-7	11100	21400	1234	2689	168
-6	11725	22100	1310	2599	179
-5	11950	21650	1262	2465	168
-4	12025	22650	1242	2536	164
-3	12325	21000	1170	2497	171
-2	13675	23625	1260	2468	176
-1	14300	24150	1342	2500	165
0	14800	25825	1530	2365	160

On calcule les variations relatives  $\Delta_k(t)$  pour  $t = -9, \dots, 0$  :

$$\Delta_1(-9) = \frac{13150 - 12800}{12800} = 0.0273$$

t	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\Delta_5$
-9	0,027	-0,014	-0,002	-0,013	0,039
-8	-0,076	-0,055	-0,055	-0,018	0,082
-7	-0,086	-0,022	0,057	-0,010	0,159
-6	0,056	0,033	0,062	-0,033	0,065
-5	0,019	-0,020	-0,037	-0,052	-0,061
-4	0,006	0,046	-0,016	0,029	-0,024
-3	0,025	-0,073	-0,058	-0,015	0,043
-2	0,110	0,125	0,077	-0,012	0,029
-1	0,046	0,022	0,065	0,013	-0,063
0	0,035	0,069	0,140	-0,054	-0,030

ainsi que les valeurs estimées pour la prochaine période :

$$X_1^{(-9)} = 14800 \times (1 + 0.0273) = 15204.7$$

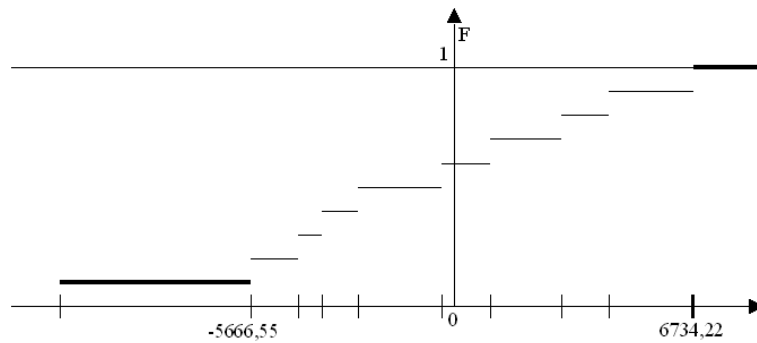
t	$X_1(1)$	$X_2(1)$	$X_3(1)$	$X_4(1)$	$X_5(1)$
-9	15204,69	25467,47	1527,53	2335,44	166,20
-8	13674,52	24402,67	1445,83	2322,23	173,13
-7	13520,99	25264,23	1616,46	2342,35	185,38
-6	15633,33	26669,74	1624,23	2285,84	170,48
-5	15084,01	25299,15	1473,94	2243,06	150,17
-4	14892,89	27017,84	1505,75	2433,12	156,19
-3	15169,23	23943,71	1441,30	2328,63	166,83
-2	16421,10	29053,13	1647,69	2337,53	164,68
-1	15476,42	26398,89	1629,57	2395,66	150,00
0	15317,48	27616,17	1744,34	2237,29	155,15

On détermine alors la valeur du portefeuille en  $t = 0$  et les estimations des valeurs futures.

$$p_P^{(-9)}(1) = 3 \times 15204.7 + 2 \times 25467.5 + 5 \times 1527.5 + 4 \times 2335.4 + 6 \times 166.2 = 114525.6$$

t	$p_P(0)$	$p_P(1)$	L
-9	114120,00	114525,59	-405,59
-8	114120,00	107385,78	6734,22
-7	114120,00	109655,38	4464,62
-6	114120,00	118526,87	-4406,87
-5	114120,00	113093,29	1026,71
-4	114120,00	116912,73	-2792,73
-3	114120,00	110917,13	3202,87
-2	114120,00	125946,20	-11826,20
-1	114120,00	117857,54	-3737,54
0	114120,00	119786,55	-5666,55



Graphique 3.5. *Fonction de Répartition*

Enfin, la fonction de répartition des pertes subies permet d'obtenir l'estimation de la  $VaR$ .

On déduit ainsi aisément les valeurs :

$$\begin{aligned} VaR_{0,95} &= 6734.22 \\ VaR_{0,05} &= -5666.55 \end{aligned}$$

*En conclusion.* Le principal reproche que l'on peut formuler à l'encontre de cette méthode est le suivant : il suffit qu'un petit nombre d'observations sortent de l'ordinaire pour que la valeur de la  $VaR$  soit influencer pendant une longue période (égale à la durée des historiques). Ainsi, une erreur de mesure ou une valeur exceptionnelle peuvent avoir des effets désastreux sur l'estimation de la  $VaR$ <sup>7</sup>.

En revanche, cette méthode possède l'avantage d'être une méthode simple, flexible et robuste. Les hypothèses sont peu exigeantes et les données nécessaires peu nombreuses.

### 2.3 ... mais un intérêt particulier pour la méthode Monté Carlo

La simulation de Monté Carlo<sup>8</sup> est généralement utilisée lorsqu'il est difficile de déterminer la loi de probabilité d'une distribution grâce à un raisonnement mathématique. C'est une technique très puissante mais très lourde à mettre en œuvre et il convient d'analyser, comme nous l'avons fait ci-dessus, les différentes approches possibles avant de faire son choix.

#### La $VaR$ Monté Carlo classique

Nous présentons ici la méthodologie classique d'estimation de la  $VaR$  par la technique de Monté Carlo en l'appliquant tour à tour au cas d'un facteur de risque et d'un portefeuille.

<sup>7</sup>L'approche par la théorie des valeurs extrêmes peut aider à résoudre ce problème.

<sup>8</sup>Pour les méthodes de simulations de Monté Carlo, la précision des paramètres estimés est proportionnelle à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $n$  étant le nombre de simulations effectuées. Pour 10.000 simulations, on obtient donc une précision de l'ordre de 1%. Toutefois, il est possible d'améliorer cette précision en utilisant des techniques de réduction de la variance, les principales utilisées étant "l'approche antithétique" et "la méthode d'égalité des moments". Toutes ces techniques sont détaillées dans Boyle, Broadie et Glasserman [1997, pp. 1267-1321] : "Monte Carlo methods for security pricing", *Journal of Economic Dynamics and Control*.

*Pour un facteur de risque.* Avant de s'attaquer au problème d'estimation de la  $VaR$ , il convient de réfléchir plus particulièrement au modèle d'évaluation du facteur de risque que l'on va considérer. Généralement, on retient plusieurs modèles d'évaluation et on choisit pour chaque facteur de risque le modèle qui sera le plus adapté. On retiendra par exemple une distribution normale ou un mouvement brownien géométrique selon que l'on considère le return d'une action ou celui d'une option.

A partir des observations passées du facteur de risque  $X(t)$   $t = -T + 1, \dots, 0$ , on estime les paramètres du modèle d'évaluation relatifs à ce facteur. On peut ensuite simuler un grand nombre  $M$  de valeurs futures du facteur de risque

$$X^{(t)}(1) \quad t = 1, \dots, M$$

et on détermine la loi de distribution de la perte encourue

$$L^{(t)} = X(0) - X^{(t)}(1) \quad t = 1, \dots, M$$

et ainsi la valeur de la  $VaR$ .

*Pour un portefeuille.* On suppose comme précédemment que les  $N$  actifs constituant le portefeuille sont fonctions d'un ou plusieurs facteurs de risque  $X_1, \dots, X_n$

$$p_j(0) = f_j(X_1(0), \dots, X_n(0))$$

Avant de générer les valeurs futures des facteurs de risque, on détermine la matrice de variance-covariance<sup>9</sup> et on effectue une décomposition de Cholesk<sup>10</sup>. On peut ainsi prendre en compte la structure de corrélation des facteurs de risque.

Une fois les  $X_k^{(t)}(1)$  générés, on estime par substitution la valeur future des actifs constituant le portefeuille

$$p_j^{(t)}(1) = f_j(X_1^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1))$$

et ainsi, la valeur future du portefeuille

$$\begin{aligned} p_P(1) &= \sum_{j=1}^N n_j p_j(1) \\ &= \sum_{j=1}^N n_j f_j(X_1^{(t)}(1), \dots, X_n^{(t)}(1)) \end{aligned}$$

<sup>9</sup>On peut pour cela utiliser l'historique qui a servi à l'estimation des paramètres de leur modèle respectif.

<sup>10</sup>Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice triangulaire inférieure  $L$  à éléments diagonaux strictement positifs telle que

$$A = LL^T$$

Enfin, par différence avec la valeur initiale du portefeuille, on obtient la valeur future de la perte subie

$$L^{(t)} = p_P(0) - p_P^{(t)}(1)$$

*En conclusion.* L'approche Monté Carlo a deux caractéristiques majeures que ne possèdent pas les approches historique ou de J.P. Morgan et qui ont motivé notre choix :

En premier lieu, elle ne suppose aucune hypothèse distributionnelle et notamment aucune hypothèse de normalité. On évite ainsi de sous-évaluer la valeur de la *VaR* lorsque les distributions ont des queues plus épaisses. Elle ne formule pas non plus d'hypothèse sur la linéarité des prix des actifs.

Cette méthode est par ailleurs la seule qui puisse être adaptée au calcul d'une *VaR* à plus long terme comme le nécessite les SICAV d'Ecureuil Gestion.

#### *La VaR Monté Carlo « Ecureuil Gestion »*

L'approche Monté Carlo classique de la *VaR*, telle qu'elle peut être présentée par la Bankers Trust dans son système *RaRoc2020<sup>TM</sup>*, comporte une différence notable avec celle que nous avons décidée de retenir à Ecureuil Gestion. On ne pose en effet aucune hypothèse sur les processus suivis par les facteurs de risque (normalité ou leptocurticité du cours des actions, mouvement brownien géométrique des variations relatives, etc.). Ces derniers ont été modélisés dans la première partie de ce rapport et les seules hypothèses que l'on formule portent sur la distribution des variables fondamentales retenues : la loi de distribution de leurs variations absolues est décrite par une loi normale.

En pratique, notre méthodologie est la suivante :

1. On génère tout d'abord autant d'aléas (de même longueur que la *VaR*) qu'il n'y a de fondamentaux dans les différents modèles. On utilise un historique pour estimer la matrice de variance-covariance de ces fondamentaux et on peut ainsi prendre en compte les corrélations qui peuvent exister entre ces derniers (décomposition de Choleski).
2. On détermine ensuite les valeurs futures des différents facteurs de risque en se basant sur les modèles économétriques que l'on a déterminés précédemment. On simule pour cela autant de bruit blanc<sup>11</sup> que d'équation de court terme et on obtient ainsi les variations simulées de chaque facteur de risque.
3. Ces facteurs de risque simulés, on projette ou réévalue, selon le choix de modèle que l'on a retenu, les différentes lignes du portefeuille. Le choix du modèle d'évaluation est réalisé en fonction de la qualité des méthodes de projection et de l'existence ou non d'une formule fermée d'évaluation.
4. Grâce à ces modèles, on calcule la valeur du portefeuille en fin de scénarios et on déduit la perte subie sur la période considérée. On reprend ensuite la première étape et on recommence la procédure autant de fois que nécessaire pour obtenir la précision souhaitée.
5. Enfin, on peut déterminer la distribution des pertes subies et ainsi déduire la valeur de la *VaR* au niveau de risque voulu et sur la période considérée.

---

<sup>11</sup>c'est à dire un aléa généré sur la base d'une loi normale centrée et de même variance que celle obtenue lors de l'estimation.



# CONCLUSION GÉNÉRALE

---

Le modèle économétrique que nous avons mis au point repose sur l'existence de relations de cointégration, c'est à dire sur l'existence de sentiers de croissance communs entre les variables macro-financières. Nous avons, pour cela, utilisé une méthodologie s'inspirant principalement des travaux de Engel & Granger [1987] et de Gregory & Hansen [1996]. Le modèle estimé rend compte de la dynamique des facteurs de risque de cinq pays : Allemagne, Etats-Unis, France, Japon et Royaume Uni. Pour chacun de ces pays, la courbe des taux d'intérêts (via un taux directeur et des spreads de taux) a été modélisé, ainsi qu'un indice boursier et le taux de change.

Mais, ce modèle doit connaître des évolutions de nature à améliorer la lisibilité et ce notamment en uniformisant les ruptures structurelles que l'on a introduit dans les relations de long terme. Il serait intéressant d'obtenir, pour un même pays, les mêmes dates de ruptures des relations cibles. Par ailleurs, sont apparus, au cours de la modélisation, des problèmes sérieux d'hétéroscédasticité pour les résidus des relations de court terme qui n'ont pu que partiellement être résolu. Il conviendrait de se pencher plus longuement sur ces problèmes et ainsi corriger plus justement cette hétéroscédasticité.

La méthode d'estimation du critère *Value at Risk* que nous avons décidé de retenir est basée sur la technique de simulations de « Monté Carlo ». Cette méthode consiste à diffuser dans le temps certaines variables un grand nombre de fois de manière à déterminer la loi de distribution des pertes encourues par un portefeuille. L'utilisation du modèle économétrique assure, lors de la diffusion des facteurs de risque, une meilleure cohérence et donc une meilleure précision. On génère des fondamentaux en respectant leur tendance de long terme et leur volatilité autour de cette tendance.

Mais, si la méthode Monté Carlo est résolument la plus adaptée à nos espérances, de nombreux points restent encore à étudier. En premier lieu, il convient d'ajuster au mieux les modèles d'évaluation des différents produits présents dans les portefeuilles. Doit-on simplement projeter une option sur les facteurs de risque caractérisant l'actif sous jacent ou vaut-il mieux projeter l'actif sur ses facteurs de risque caractéristiques et ensuite évaluer l'option (avec Black & Scholes par exemple) ?

Par ailleurs, comment doit-on gérer les lignes du portefeuille dont la maturité est antérieure à l'horizon de calcul du critère *VaR* ? Vaut-il mieux solder les positions en question et mettre le cash dans un basket rapportant le taux sans risque ou serait-il plus préférable de réinvestir ce dernier sur un benchmark ? Autant d'interrogations donc qui demanderont sans doute de nombreuses réflexions et de toutes aussi nombreuses expérimentations.

Ecureuil Gestion a pour ambition de mettre au point des outils d'aide à la décision et de gestion du risque combinant à la fois une méthodologie *Value at Risk*, des techniques de simulations « Monté Carlo » et une modélisation économétrique. Ce projet n'est encore qu'au stade expérimental et la présentation que nous en avons fait est loin d'être complète. Elle demandera sans doute de nombreuses précisions et améliorations. Mais, des résultats importants pouvant servir de point de départ aux réflexions à venir ont pu être mis en évidence.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] BEST, Philip, Implementing Value at Risk, *Wiley Financial Engineering*.
- [2] BOLLERSLEV, CHOU, JAYARAMAN, KRONER [1991], Les modèles ARCH en finance : un point sur la théorie et les résultats empiriques, *Annales d'économie et de statistique*.
- [3] DE LA BRUSLERIE, Hubert, Gestion obligataire internationale, *Economica*.
- [4] DOWD, Kevin, Beyond Value at Risk : the new science of risk management, *Wiley frontiers in finance*.
- [5] ESCH, KIEFFER, LOPEZ, Value at Risk : vers un risk management moderne, *DeBoeck Université*.
- [6] GREENE, H. William, Econometric analysis, *Prentice Hall International Editions*.
- [7] HAMILTON, D. James, Time series analysis, *Princeton University Press*.
- [8] SHREVE, Steven, Stochastic calculus and finance, *Carnegie Mellon University*.
- [9] SIMON, Yves, Encyclopédie des marchés financiers, *Economica*.





# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>ECUREUIL GESTION : Une expérience reconnue</b>	<b>5</b>
1	Des métiers complémentaires . . . . .	5
2	Une équipe jeune et dynamique . . . . .	6
2.1	Les gérants : un des poumons de la société . . . . .	6
2.2	Des assistants très réactifs . . . . .	6
2.3	De relativement bonnes conditions de stage . . . . .	7
<b>2</b>	<b>MODÉLISATION DES FACTEURS DE RISQUE</b>	<b>9</b>
1	Problématique . . . . .	9
1.1	Notions de tendance et de choc . . . . .	10
1.2	Coïntégration, cible de long terme et mécanisme à correction d'erreur	11
1.3	Ruptures structurelles dans les cibles de long-terme . . . . .	12
2	Méthodologie statistique . . . . .	13
2.1	Estimation de la relation de long terme . . . . .	13
2.2	Estimation de la relation de court terme . . . . .	14
2.3	Simulations dynamiques . . . . .	15

3	Equations obtenues pour les différentes variables financières d'intérêt sur la période 01 :88-09 :98 . . . . .	18
3.1	La courbe des taux . . . . .	19
3.2	L'indice Standard and Poors (pris en logarithme) LUSP500 . . . . .	21
3.3	Quelques validations statistiques . . . . .	22
4	Estimation de nouvelles relations-cible sur la période 01 : 88 - 06 : 99 . . . . .	24
4.1	Des écarts significatifs . . . . .	24
4.2	En pratique . . . . .	26
<b>3</b>	<b>VALUE AT RISK</b>	<b>27</b>
1	Une théorie bien définie . . . . .	27
1.1	Une définition simple . . . . .	28
1.2	VaR d'un portefeuille . . . . .	29
2	Estimation de la VaR . . . . .	30
2.1	Une première étape obligatoire . . . . .	31
2.2	Deux méthodes intéressantes . . . . .	32
2.3	... mais un intérêt particulier pour la méthode Monté Carlo . . . . .	39
	<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>