Abdelkader Bousabaa (GRO)

Groupe de Recherche Opérationnelle
Crédit Agricole SA
93-95, boulevard Pasteur – 75015 Paris
Tel : +33 (0)1 43 23 75 75
Fax : +33 (0)1 43 23 76 29
B.C. DRG/GR

Introduction aux processus de Levy
Thanks to internet

FORMATION INTERNE

Aout 2004

Table des matières

1 Introduction

Messieurs Un, Deux et Trois recherchent en toute hâte un prénom pour leur fils nouveau-né. Manquant d'inspiration, ils décident de choisir un prénom au hasard. Mais chacun d'eux à une notion toute personnelle du hasard :

- Monsieur Un, facteur de son état, joue aux fléchettes sur le calendrier des postes (on est en Juillet).
- Monsieur Deux, grand gourmand, croque une pomme et choisit le premier prénom qui lui passe par la tête.
- Monsieur Trois, amateur d'exotisme, décide de choisir le prénom du premier scandinave qu'il verra à la télé.

Plus tard, sur les bancs de l'école, seront assis trois marmots dénommés :

- Fêtenat Un
- Adam Deux
- Larsvon Trois

Cet exemple montre que le choix du mode de tirage est plus déterminant que le tirage lui même. Ainsi le hasard n'est pas qu'une question de hasard. Les ”probabilistes” sont des mathématiciens spécialisés dans l'étude des différents modes de tirages aléatoires. Une partie d'entre eux, s'occupent des ”processus de Lévy” : ce sont des Lotos gigantesque, où les numéros sont remplacés par des ”trajectoires”. Mais commençons par le début.

2 Les probabilités discrètes ...

C'est l'étude des propriétés du dé à 6 faces et de ses variantes : le pile ou face, la distribution des cartes à jouer, les tirages dans une urne etc... Restons-en aux dés, ils vont permettre d'expliquer simplement trois notions fondamentales.

2.1 La loi

lorsque l'on joue aux dés, certains évènements sont plus probable que d'autres. Par exemple, il est plus facile d'obtenir un chiffre entre 1 et 4, qu'un chiffre entre 5 et 6 :

- On a quatre chances sur six d'obtenir un chiffre entre 1 et 4. La probabilité de cette évènement est donc de "quatre-sixièmes" (4/6) ou bien de "deux-tiers" (2/3).
- On a deux chances sur six d'obtenir 5 ou 6. La probabilité de cette évènement est donc de "deux-sixième" (2/6) ou "un-tiers " (1/3).

Etudier la loi d'un phénomène aléatoire, c'est simplement calculer des probabilités. Voici quelques exercices classiques :

- Quelle est la probabilité de faire 7 en tirant deux dés ? Réponse : (1/6)
- Quelle est la probabilité de faire deux fois le même chiffre en tirant trois dés ? Réponse (4 /9)

2.2 Un évenement "presque-sûre"

Lors d'un phénomène aléatoire, certains événements se produisent à coup sûr. Voici un exemple idiot : " en lançant un dés, je suis sûr de tomber sur un chiffre entre 1 et 6 ". Mais les mathématiciens sont prudents, ils diront plutôt : " en lançant un dé, je suis presque-sûr de tomber sur un chiffre entre 1 et 6 " (le presque c'est pour le cas où le dé resterais sur la tranche). En lançant un seul dé, nous avons vite fait le tour de tous les événements presque-sûrs. En lançant plusieurs dés, cela devient intéressant. Voici un exemple pas trop idiot : Choisissons une séquence de chiffres : " 2,6,4,3,3,5,6,2,3 ". Puis lançons un dé, une fois, deux fois, trois fois ..., en relevant au fur et à mesure les numéros qui apparaissent. Figurez-vous qu'au bout d'un certain temps, la suite de chiffre choisie initialement : " 2,6,4,3,3,5,6,2,3 " va apparaître dans l'ordre, sur notre feuiller de papier. Et pour cela, point besoin d'être un magicien, car c'est un événement presque-sûr (tentez l'expérience si vous êtes patient !).

2.3 L'indépendance

Lorsque l'on jette deux dés, simultanément ou l'un après l'autre, les deux lancés sont toujours indépendants. Cela signifie que le résultat du premier lancé n'influence pas le résultat du second lancé. Pour lancer des dés de manière non indépendante, il faut être un fieffé tricheur. Par exemple, pour sauver la planète, James Bond doit absolument faire 7 en lançant deux dés. Il lance le premier, nonchalamment le dé roule, suspense Gros plan : il s'arrête sur le 5. Dans ses manches, au début du film, Q a glisser tout un attirail de dés pipés. 007 choisit discrètement le dé étudier pour faire des 2, il le lance et gagne. Le premier lancé à clairement influencé le deuxième, nous sommes dans une configuration flagrante de non-indépendance.

Maintenant laissons les probabilités discrètes aux élèves des terminales, et consacrons-nous aux probabilités continues, strictement réservées aux adultes du GRO ...

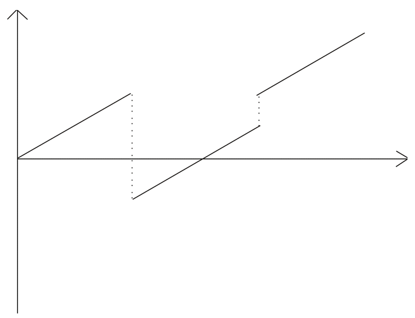
3 Les probabilités continues ...

C'est l'étude de dés qui ont un nombre infini de faces. Ne criez pas à l'imposture, cela existe ; une boule de pétanque, c'en est un : il suffit de considérer que chaque point à la surface de la boule est une face. Pour faire un tirage, il me suffit de pointer ; le point de contact entre le cochonnet et ma boule sera la face sélectionnée (si vous êtes moins doué que moi, vous pouvez aussi choisir le point de contact entre la boule et le sol).

3.1 Une trajectoire

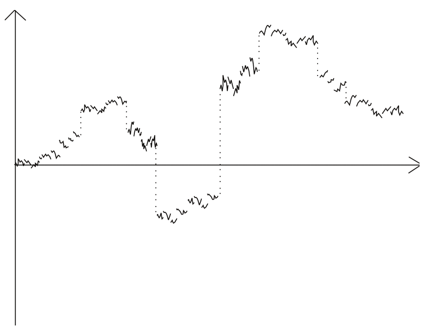
Une trajectoire est une fonction (une courbe). On la représente dans un système de deux axes. L'axe horizontal représente le temps, l'axe vertical représente une quantité quelconque variant en fonction du temps, par exemple : Le prix de l'action Moulinex, la température à Rouen, le volume de SNO_2 dégagée par une voiture sportive, etc. Les trajectoires peuvent effectuer des sauts (représentés par des pointillés verticaux).

- Il existe des trajectoires simples ...



Graphique 3.1. *Trajectoires simples*

- Et des trajectoires compliquées ...

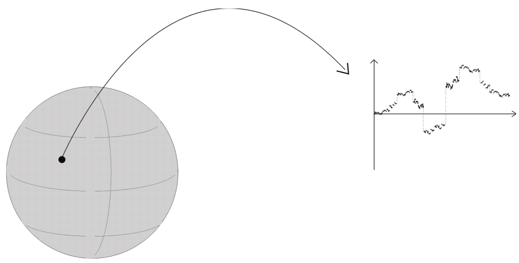


Graphique 3.2. *Trajectoires complexes*

Les trajectoires les plus intéressantes sautent incessamment : chaque bout de trajectoire, aussi petit soit-il, comporte une infinité de sauts ; mais bien entendu, la grande majorité des sauts sont très très petits (sinon la trajectoire exploserait).

3.2 Un processus

Un processus est un dé ayant un nombre infini de faces, et sur chacune d'elle est dessinée une trajectoire ...

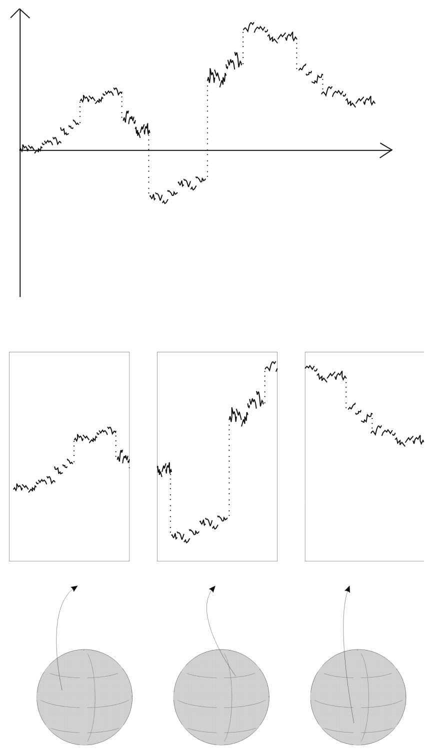


Graphique 3.3. *Qu'est-ce qu'un processus ?*

NB : Faites attention en lisant la suite de ne pas confondre " une trajectoire " avec un " processus " : le processus est un dé qui englobe une infinité de trajectoire.

3.3 Un processus de Levy

C'est un processus qui possède une propriété bien particulière : chacune de ses trajectoires peut être découpée en n morceaux, et chaque morceau est lui même un processus de Lévy.



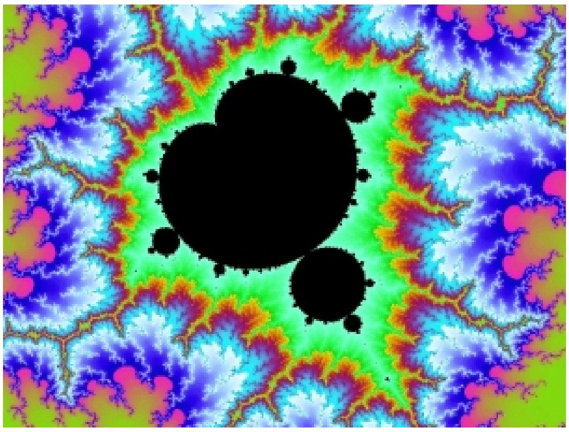
Graphique 3.4. *Processus de Levy*

Détaillons cela avec n=3 : Appelons X notre processus de Lévy initial. Il existe un autre processus de Lévy Y (que l'on se représente par un dé-boule) tel que : Si nous lançons trois fois Y et si nous recollons les trois trajectoires obtenus, nous retombons sur une trajectoire de X.

Si vous avez bien suivit, on peut compliquer un peu : puisque Y est lui même un processus de Lévy, je peux trouver Z, tel qu'en lançant trois fois Z, je retombe sur Y. Du coup, en lançant 9 fois Z, je retombe sur X. Et cela peut continuer ainsi jusqu'à ce que mort s'en suive (Les Lévy sont "infiniment divisibles").

Ainsi chaque trajectoire d'un processus de Lévy est le résultat d'un très grand nombre de tirages aléatoires. Ceci explique pourquoi ces trajectoires sont souvent chaotiques. Mais attention, il existes des tas de processus de Lévy différents. Rien qu'en regardant l'aspect général de leur trajectoires, on peut déjà distinguer 2 sortes de processus de Lévy :

- Les Lévy à variation finie. Ils sont simples car chacune de leurs trajectoires est la somme d'une trajectoire croissante, et d'une trajectoire décroissante.
- Les Lévy à variation infinie : Par définitions, ce sont ceux qui ne sont pas à variation finie ! Ils sont très compliqués et très intéressants : leurs trajectoires sont horriblement fluctuantes.

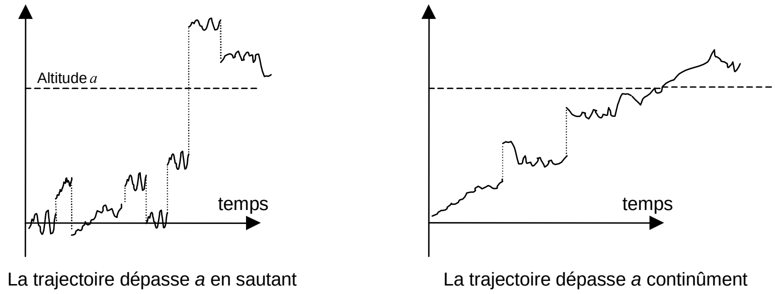


Graphique 3.5. *Une fractale déterministe*

Les processus de Lévy possèdent bien d'autres particularités qui permettent de les distinguer. Dans cette thèse, nous avons étudié spécifiquement : La reptation et le relief. Ce sont des propriétés presque-sûres : elles sont visibles sur toutes les trajectoires à l'exception d'un très petit nombre que l'on qualifie de négligeable (tout comme est négligeable la probabilité qu'un dé reste sur la tranche).

4 La Reptation

Fixons nous une altitude a. Au bout d'un certain temps, les trajectoire d'un Lévy vont dépasse cette altitude. Il existe deux manières de franchir a :



Graphique 4.6. *La reptation*

on distingue ainsi deux sortes de Processus de Lévy :

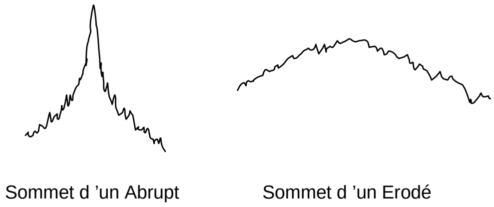
- Les Lévy qui ne rampent pas vers le haut : (presque)-toutes leurs trajectoires vont dépasser a en sautant.
- Les Lévy qui rampent vers le haut : certaines de leurs trajectoires vont dépasser a en sautant et d'autres continûment.

Remarque : Il est assez difficile d'imaginer un Lévy qui ne rampe pas vers le haut car, non seulement ses trajectoires vont dépasser l'altitude a en sautant, mais elles vont aussi dépasser toutes les altitudes en sautant. Pour imaginez un tel phénomène, il faut penser à une trajectoire qui fait une infinité de petits sauts positifs. Mais on peut aussi se résigner au fait que la réalité mathématique est rarement représentable graphiquement.

5 Le Relief

c'est la forme des maximums (ou sommets) des trajectoires. Dans la famille des processus de Lévy à variation infini (les plus compliqué), nous avons distingué deux sous-classes de processus de Lévy :

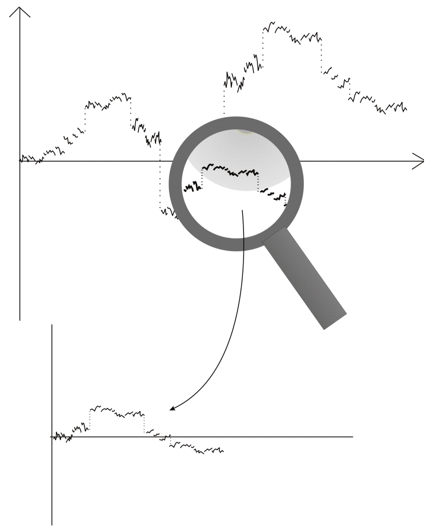
- Les Abrupts : Leurs trajectoires ont des sommets extrêmement pointu.
- Les Erodés : Leurs trajectoires ont des sommets relativement plat.



Graphique 5.7. *Le Relief*

5.1 Les processus stables

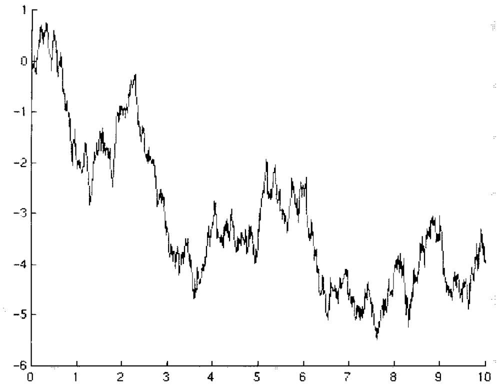
Ce sont des processus de Lévy particuliers. Ils possèdent la propriété suivante : si je zoome sur une partir de leur trajectoire, cette partie aura la même allure que la trajectoire entière. Ces objets sont des "fractales statistiques". Mais attention, contrairement aux "fractales déterministes", en zoomant on ne retombe pas exactement sur le même dessin. On obtient seulement un dessin ayant vaguement la même "allure". Mathématiquement cela signifie que toutes les propriétés en loi sont les mêmes c.à.d que les probabilités calculées avec le processus initial sont identiques que les probabilités calculées après avoir zoomé. Les processus stables sont relativement bien connus, on peut les simuler facilement.



Graphique 5.8. *Les processus stables*

5.2 Le Mouvement Brownien

est le plus célèbre des processus de Lévy. Non seulement c'est un processus stable, mais en plus il est continu (il ne fait aucun saut), ce qui ne l'empêche pas d'être complexe (il est à variation infinie).



Graphique 5.9. *Le mouvement brownien*

Y'en a marre des maths ! Maintenant nous allons parler physique. L'étude des processus de Lévy a débutée par l'étude du mouvement brownien, qui elle même a été motivée par la découverte d'un Physicien

6 Conclusion

La famille des processus de Lévy est si riche et ses propriétés si variées que son étude peut s'avérer aussi fascinante que celle des objets célestes. Malheureusement cette fascination est réservée à un public plus restreint. Il manque à cette discipline quelques belles photos, un Hubert Rive et peut-être aussi un brin de Métaphysique. Mais qui sait ? peut-être un jour nous découvrirons que le cour de la vie est une trajectoire de Lévy.

[—]

Et maintenant, au travail !

7 ANNEXES

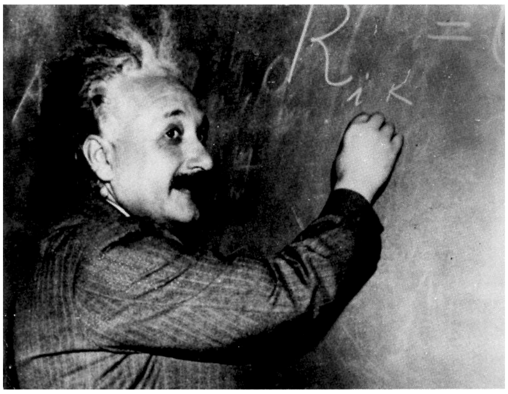
7.1 Mr Brown

Graphique 7.10. *Mr Brown fait une étrange découverte !*

Au début du XIXe siècle, dans un sombre laboratoire de physique, le chercheur Brown découvrit un phénomène bizarre. Observant un verre d'eau avec un bon microscope, il y vit des petits zigouigouis qui s'agitaient dans tous les sens ; difficiles à décrire : c'était des sortes de lignes tarabiscotées, des serpentins frénétiques qui avançaient en s'emmêlant sans aucune logique ; il cru tout naturellement avoir détecter la trace de bestiole vivant dans l'eau. Il zooma pour essayer de voir leur tête, mais dans sa lentille apparaissait toujours le même schéma. Notre infortuné chercheur eut beau pousser son microscope au maximum de sa résolution, rien à faire, toujours les mêmes zigouigouis. Il fit alors bouillir sont eau pour tuer ce qu'il pensait être des bactéries, mais cela ne changea rien. Ne se démontant pas, il congela son eau, y injecta du cyanure, du bleu de méthylène, de la mort au rat et de la vodka, mais rien y fit, les bestioles subsistaient toujours. Il s'aperçut tout de même que plus l'eau était froide et moins vite les zigouigouis s'agitaient.

L'explication : un siècle plus tard, Einstein en personne ! élucida ce mystère : Loin d'être la trace d'une vie quelconque, le mouvement brownien est simplement la trace de poussières microscopiques qui sont en permanence heurtées par des molécules d'eau. Ces poussières sont vraiment très petites, ce qui explique que Brown n'ai pu les observer (avec les moyens de son époque) mais, comparées à la taille des molécules, elles sont suffisamment grosses pour être sans arrêt choquées, ce qui provoque un mouvement complètement désordonné, sans aucune ligne droite. Quelque soit la résolution employé, Brown n'a observé que des mouvements moyens et quelque soit l'échelle ces mouvements moyens ont globalement le même aspect de lignes tarabiscotées. Quand l'eau refroidie, les molécules H_2O se calment et par conséquent les poussières son moins secouées.

7.2 Einstein



Graphique 7.11. *Est-il besoin de ...*

Par l'un de ses raccourcis étonnant dont est capable le cerveau d'un géni, Einstein réussit à estimer précisément la concentration des molécules d'eau, en simplement observant le désormais célèbre mouvement brownien.

7.2.1 La modélisation

A tout phénomène physique, on peut associer un modèle : c.à.d. un objet mathématique abstrait qui ressemble au phénomène. Ainsi, au mouvement brownien observé, Einstein associa le Mouvement brownien théorique : un processus qui répond aux trois axiomes suivants :

Axiome 1. *Accroissement indépendant* : (un accroissement est un bout de trajectoire). Cet axiome signifie que les bouts de trajectoires sont indépendants les uns des autres. Ceci correspond bien à la réalité physique : La masse de la poussière étant très faible, elle a très peu d'inertie, de plus elle reçoit des chocs incessants, nous pouvons donc considérer qu'à chaque instant, la poussière se meut sans être influencée par son mouvement antérieur.

Axiome 2. *Accroissement stationnaire* : le mouvement de la poussière a le même aspect au court du temps. Ceci est logique puisque les conditions de l'expérience ne varient pas. Cet axiome serait mis en défaut si, par exemple, on s'amusait à chauffer l'eau au fur et à mesure de l'expérience.

Axiome 3. *Continuité* : La continuité est l'absence de saut. Sauter, c'est disparaître à un endroit et réapparaître instantanément à un autre endroit. Une poussière étant un corps solide ordinaire, elle ne saute pas. En fait, dans la nature, seules quelques particules élémentaires peuvent réellement sauter. A l'inverse, les objets mathématiques abstraits peuvent sauter sans restrictions aucunes. Cet axiome est donc indispensable si l'on veut bien modéliser la poussière.

7.2.2 Le Brownien est un Levy

Un processus de Lévy est simplement un processus qui vérifie les axiomes 1 et 2 mais pas forcément l'axiome 3. - Quel est donc le lien entre les dés-boules du début et les axiomes 1 et 2 ? Rappelez-vous que chaque trajectoire d'un processus de Lévy peut-être fabriquée en lançant plusieurs fois le même dé-boule. On ne triche pas : le premier lancé n'influe pas sur le deuxième, ni sur les suivants ; les accroissements sont donc bien "indépendants". De plus, puisqu'on lance plusieurs fois le même dé-boule, les accroissements sont bien "stationnaires".

7.2.3 La recherche avance

Le mouvement brownien est devenu l'objet fétiche de nombreux probabilistes, physiciens et analystes : il est présent dans les modélisations physiques mettant en jeu des particules, il sert aussi à calculer des équations différentielles complexes. Ses propriétés sont si nombreuses qu'il ne se passe pas un jour sans qu'un article à son sujet ne soit publié. Les processus de Lévy, qui en sont la généralisation, sont eux aussi très à la mode ; mais ils sont plus complexe, et nous les connaissons moins bien.